72. ročník MO, úloha B-I-3

Určte všetky dvojice (a, b) reálnych čísel také, že každá z kvadratických rovníc

$$(a+b)x^2 + \left(a^2+b^2\right)x + 2ab = 0,$$
$$(a+b)x^2 + 2abx + \left(a^2+b^2\right) = 0$$

s neznámou x má dvojnásobný koreň.

Jaroslav Švrček

Riešenie 1

Nech $r = a+b$, $s = a^2+b^2$, $t = 2ab$, potom ekvivalentne

$$rx^2 + sx + t = 0,$$
$$rx^2 + tx + s = 0.$$

Kvadratické rovnice s dvojnásobným koreňom to budú práve vtedy, keď $r \neq 0$ a diskriminanty oboch z nich budú nulové. Dostávame tak

$$s^2 - 4rt = 0,$$
$$t^2 - 4rs = 0,$$

t. j.

$$s^2 = 4rt,$$
$$t^2 = 4rs.$$

Z toho dostávame

$$s^3 = 4rst = t^3,$$
$$s = t,$$
$$a^2+b^2 = 2ab,$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = 0,$$
$$(a-b)^2 = 0,$$
$$a-b = 0,$$
$$a = b.$$

Potom

$$r = a+a = 2a,$$
$$s = t = 2ab = 2aa = 2a^2.$$

Preto

$$4a^4 = \left(2a^2\right)^2 = s^2 = 4rt = 4\cdot 2a\cdot 2a^2 = 16a^3,$$
$$a^4 = 4a^3,$$
$$a^4 - 4a^3 = 0,$$
$$a^3(a-4) = 0,$$

takže

$$\left(a^3 = 0\right) \vee (a-4=0),$$
$$(a=0) \vee (a=4),$$
$$((a,b)=(0,0)) \vee ((a,b)=(4,4)).$$

Rozoberme prípady:

- Nech $(a, b) = (0, 0)$.
  Potom však
  $$r = 0+0 = 0,$$
  čo je spor.
  Tento prípad teda nenastáva.

- Nech $(a, b) = (4, 4)$.

  Potom
  $$r = 2 \cdot 4 = 8,$$
  $$s = t = 2 \cdot 4^2 = 2 \cdot 16 = 32,$$

  takže obe rovnice zo zadania sú
  $$8x^2 + 32x + 32 = 0,$$

  ekvivalentne
  $$x^2 + 4x + 4 = 0,$$
  $$(x + 2)^2 = 0,$$
  $$x + 2 = 0,$$
  $$x = -2,$$

  takže rovnice sú kvadratické a majú dvojnásobný koreň -2.

Jediná vyhovujúca dvojica je teda $(4, 4)$.

Riešenie 2

Keďže obe rovnice majú dvojnásobný koreň, platí $a + b \neq 0$. Nech u je dvojnásobný koreň prvej a v dvojnásobný koreň druhej. Podľa Viètových vzťahov
$$-\left(a^2 + b^2\right) = (a + b)(u + u) = 2(a + b)u,$$
$$2ab = (a + b)(-u)(-u) = (a + b)u^2,$$

resp.
$$-2ab = (a + b)(v + v) = 2(a + b)v,$$
$$a^2 + b^2 = (a + b)vv = (a + b)v^2.$$

Keďže $a + b \neq 0$, platí $a^2 + b^2 \neq 0$, z čoho $u, v \neq 0$.

Potom
$$u = \frac{-\left(a^2 + b^2\right)}{2(a + b)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(a^2 + b^2\right)}{a + b} = -\frac{1}{2}v^2$$

a
$$v = \frac{-2ab}{2(a + b)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2ab}{a + b} = -\frac{1}{2}u^2.$$

Z toho
$$-u^3 = 2 \cdot u \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot u^2\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot v^2\right) \cdot v = -v^3,$$
$$u^3 = v^3,$$
$$u = v,$$

a teda
$$u = -\frac{1}{2}u^2,$$
$$-2u = u^2,$$
$$-2 = u.$$

Platí tiež
$$\frac{-\left(a^2 + b^2\right)}{2(a + b)} = \frac{-2ab}{2(a + b)},$$
$$a^2 + b^2 = 2ab,$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = 0,$$
$$(a - b)^2 = 0,$$
$$a - b = 0,$$
$$a = b.$$

Potom

$$-2 = u = \frac{-\left(a^2+b^2\right)}{2(a+b)} = \frac{-\left(a^2+a^2\right)}{2(a+a)} = \frac{-2a^2}{2\cdot 2a} = -\frac{1}{2}a,$$
$$4 = a = b.$$

Rovnice zo zadania sú potom

$$(4+4)x^2 + \left(4^2+4^2\right)x + 2\cdot 4\cdot 4 = 0,$$
$$(4+4)x^2 + 2\cdot 4\cdot 4\cdot x + \left(4^2+4^2\right) = 0,$$

t. j. ekvivalentne

$$8x^2 + (16+16)x + 32 = 0,$$
$$8x^2 + 32x + (16+16) = 0,$$

t. j. zhodne

$$8x^2 + 32x + 32 = 0,$$

ekvivalentne

$$x^2 + 4x + 4 = 0,$$
$$(x+2)^2 = 0,$$
$$x + 2 = 0,$$
$$x = -2,$$

takže obe rovnice sú kvadratické a majú dvojnásobný koreň -2.
Jediná vyhovujúca dvojica je teda $(4, 4)$.

Edičná poznámka

V pôvodnom zadaní boli rovnice v tvare

$$a(x^2+ax+b) + b(x^2+bx+a) = 0,$$
$$a(x^2+bx+a) + b(x^2+ax+b) = 0.$$

Ako je definovaná kvadratická rovnica? Sú to potom kvadratické rovnice?