68. ročník MO, úloha A-S-1

Nájdite všetky dvojice prvočísel (p, q) také, že rovnica $x^2 + px + q = 0$ má aspoň jeden celočíselný koreň.

Patrik Bak

Riešenie 1

Nech x_1 a x_2 sú oba korene tejto rovnice. Podľa Viètových vzťahov potom platí

$$x_1 + x_2 = -p,$$
$$x_1 x_2 = q.$$

Keďže aspoň jedno z čísel x_1 a x_2 je celé a $x_1 + x_2$ čiže $-p$ je celé, aj druhé z týchto čísel je celé. Keďže q je prvočíslo, bez ujmy na všeobecnosti $|x_1| = 1$ a $|x_2| = q$, pričom x_1 a x_2 majú rovnaké znamienka. Rozoberme prípady:

- Nech $x_1 = -1$ a $x_2 = -q$.
  Potom
  $$-1 - q = p,$$
  $$0 = p + q + 1,$$
  čo je spor, lebo pravá strana je kladná.
  Tento prípad teda nenastáva.
- Nech $x_1 = 1$ a $x_2 = q$.
  Potom
  $$1 + q = p,$$
  takže p a q majú rôznu paritu. Keďže $p - q > 0$, t. j. $p > q$, platí $q = 2$, a potom
  $$p = q + 1 = 2 + 1 = 3.$$
  Ide teda o rovnicu
  $$x^2 + 3x + 2 = 0,$$
  ekvivalentne
  $$(x + 2)(x + 1) = 0,$$
  $$(x - (-2))\,(x - (-1)) = 0,$$
  $$x \in \{-2, -1\},$$
  takže dvojica $(2, 3)$ vyhovuje.

Jediná vyhovujúca dvojica je teda $(2, 3)$.

Riešenie 2

Nech a je celočíselný koreň tejto rovnice, platí teda

$$a^2 + pa + q = 0,$$
$$a^2 + pa = -q,$$
$$a(a + p) = -q,$$
$$-a(a + p) = q.$$

Číslo a teda delí prvočíslo q. Rozoberme prípady:

- Nech $a = -q$.
  Potom
  $$(-(-q))\,((-q) + p) = q,$$
  $$q(-q + p) = q,$$
  $$-q + p = -1,$$
  $$p - q = 1.$$

- Nech $a = -1$.
  Potom
  $$(-(-1))\,((-1)+p) = q,$$
  $$1 \cdot (-1+p) = q,$$
  $$-1+p = q,$$
  $$p-q = 1.$$
- Nech $a = 1$.
  Potom
  $$(-1)(1+p) = q,$$
  $$1+p = -q,$$
  $$1+p+q = 0,$$
  čo je spor, lebo pravá strana je kladná.
  Tento prípad teda nenastáva.
- Nech $a = q$.
  Potom
  $$(-q)(q+p) = q,$$
  $$q+p = -1,$$
  $$1+p+q = 0,$$
  čo je spor, lebo pravá strana je kladná.
  Tento prípad teda nenastáva.

V oboch pozitívnych prípadoch teda
$$p-q = 1,$$
takže prvočísla p a q majú rôznu paritu. Keďže $p-q > 0$, t. j. $p > q$, platí $q = 2$, a potom $p = q+1 = 2+1 = 3$.
Ide teda o rovnicu
$$x^2+3x+2 = 0,$$
ekvivalentne
$$(x+2)(x+1) = 0,$$
$$(x-(-2))\,(x-(-1)) = 0,$$
$$x \in \{-2,-1\},$$
takže dvojica $(2,3)$ vyhovuje.
Jediná vyhovujúca dvojica je teda $(3,2)$.

Edičná poznámka

Pôvodné tretie riešenie (pomocou diskriminantu) je neprimerane komplikované. Pôvodné štvrté riešenie namiesto priamej práce s prvočíslami rozoberá ich paritu.