64. ročník MO, úloha C-I-6

Nájdite najmenšie prirodzené číslo n také, že číslo $\sqrt{n}$ je iracionálne a bezprostredne za desatinnou čiarkou má dve cifry 9.

Josef Tkadlec

Riešenie

Nech n je vyhovujúce číslo a a je najmenšie prirodzené číslo väčšie než $\sqrt{n}$. Platí teda

$$a - 0{,}01 \leq \sqrt{n} < a,$$

$$(a - 0{,}01)^2 \leq n < a^2.$$

Keďže čísla n a a^2 sú prirodzené,

$$(a - 0{,}01)^2 \leq n \leq a^2 - 1,$$

$$(a - 0{,}01)^2 \leq a^2 - 1,$$

$$a^2 - 0{,}02a + 0{,}0001 \leq a^2 - 1,$$

$$1{,}0001 \leq 0{,}02a,$$

$$\frac{1{,}0001}{0{,}02} \leq a,$$

$$50{,}005 \leq a,$$

$$51 \leq a.$$

Potom

$$n \geq (a - 0{,}01)^2 = (51 - 0{,}01)^2 = 50{,}99^2 = 2599{,}9801,$$

takže

$$n \geq 2600.$$

A keďže $51 > \sqrt{2600} > 50{,}99$, najmenšia vyhovujúca hodnota n je 2600.