63. ročník MO, úloha B-S-2

Rozhodnite, či existuje množina taká, že obsahuje 2014 rôznych reálnych čísel a súčet každých dvoch jej prvkov je celé číslo a

a) neobsahuje žiadne celé číslo;

b) obsahuje iracionálne číslo.

Ján Mazák

Riešenie

a) Vyhovujúca množina je napríklad

$$\left\{\frac{1}{2}+i\colon i\in\{0,\dots,2013\}\right\}.$$

Ak sú totiž i_1 a i_2 prvky $\{0,\dots,2013\}$, tak

$$\left(\frac{1}{2}+i_1\right)+\left(\frac{1}{2}+i_2\right)=1+i_1+i_2\in\mathbb{Z}.$$

b) Nech a je ľubovoľný iracionálne číslo z takej množiny. Nech b a c sú ľubovoľné dva iné jej prvky. Potom čísla $a+b$, $a+c$, $b+c$ sú celé, takže aj číslo $(a+b)+(a+c)-(b+c)$ čiže $2a$ je celé číslo, a teda a je racionálne číslo, čo je spor.

Takáto množina teda neexistuje.

Edičná poznámka

Pôvodné druhé riešenie je len špeciálnou obmenou prvého.