63. ročník MO, úloha A-S-3

V mriežke $x \times y$, kde $x > y > 1$, s vyznačenými mrežovými bodmi zlepením dvoch protiľahlých strán zhotovíme plášť rotačného valca. Každé dva vyznačené body potom spojíme úsečkou.

a) Vyjadrite počet takýchto úsečiek prechádzajúcich vnútornými bodmi tohto valca, pomocou x a y.

b) Rozhodnite, kedy bude tento počet väčší – keď bude x výška valca, alebo obvod jeho podstavy?

Vojtech Bálint

Riešenie

a) Nech $\{a, b\} = \{x, y\}$, pričom zlepíme strany dĺžky b.

Všetky vyznačené body na plášti ležia na a úsečkách rovnobežných s výškou, a na každej z nich ich je $b + 1$. Celkovo je ich teda $a(b + 1)$, úsečiek s takýmito krajnými bodmi je teda $\binom{a(b+1)}{2}$.

Úsečky, ktoré nemajú s valcom žiadny spoločný vnútorný bod, sú dvoch druhov:

- Oba ich krajné body ležia v tej istej podstave.
  V každej z nich je ich a, takže úsečiek s týmito krajnými bodmi je $\binom{a}{2}$.
- Oba ich krajné body ležia na tej istej z a úsečiek rovnobežných s výškou.
  V každej z nich je ich $b + 1$, takže úsečiek s týmito krajnými bodmi je $\binom{b+1}{2}$.

Hľadaný počet označme p, potom

$$p = \binom{a(b+1)}{2} - 2 \cdot \binom{a}{2} - a \cdot \binom{b+1}{2} = \frac{1}{2}(a(b+1)) \cdot (a(b+1) - 1) - 2 \cdot \frac{1}{2}a(a-1) - a \cdot \frac{1}{2}(b+1)b$$

$$= \frac{a}{2}((b+1)(a(b+1) - 1) - 2(a-1) - (b+1)b) = \frac{a}{2}((b+1)(ab + a - 1) - 2(a-1) - (b+1)b)$$

$$= \frac{a}{2}\left(\left(ab^2 + ab - b + ab + a - 1\right) + (-2a + 2) + \left(-b^2 - b\right)\right) = \frac{a}{2}\left(ab^2 - b^2 + 2ab - 2b - a + 1\right)$$

$$= \frac{a}{2}\left(\left(ab^2 - b^2\right) + (2ab - 2b) - (a - 1)\right) = \frac{a}{2}\left(b^2(a-1) + 2b(a-1) - (a-1)\right)$$

$$= \frac{1}{2}a(a-1)\left(b^2 + 2b - 1\right).$$

Rozoberme prípady:

- Ak je x výška valca, t. j. lepíme strany dĺžky x, počet úsečiek je $\frac{1}{2}x(x-1)\left(y^2 + 2y - 1\right)$.
- Ak je x obvod podstavy valca, t. j. lepíme strany dĺžky y, počet úsečiek je $\frac{1}{2}y(y-1)\left(x^2 + 2x - 1\right)$.

b) Platí

$$\frac{1}{2}x(x-1)\left(y^2 + 2y - 1\right) - \frac{1}{2}y(y-1)\left(x^2 + 2x - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(x^2 - x\right)\left(y^2 + 2y - 1\right) - \left(y^2 - y\right)\left(x^2 + 2x - 1\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(x^2y^2 + 2x^2y - x^2 - xy^2 - 2xy + x\right) + \left(-x^2y^2 - 2xy^2 + y^2 + x^2y + 2xy - y\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(3x^2y - 3xy^2 - x^2 + y^2 + x - y\right) = \frac{1}{2}\left(\left(3x^2y - 3xy^2\right) - \left(x^2 - y^2\right) + (x - y)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(3xy(x-y) - (x+y)(x-y) + (x-y)) = \frac{1}{2}(x-y)(3xy - (x+y) + 1)$$

$$= \frac{1}{2}(x-y)(xy + (xy - x) + (xy - y) + 1) = \frac{1}{2}(x-y)(xy + x(y-1) + y(x-1) + 1)$$

$$> \frac{1}{2}(x-y)(0 + 0 + 0 + 1) = \frac{1}{2}(x-y) \cdot 1 = \frac{1}{2}(x-y) > 0,$$

takže prvý z počtov je väčší.