60. ročník MO, úloha A-S-2

Nech ABC je pravouhlý trojuholník s preponou AB a P, Q, R sú jej body také, že

$$|AP| = |PQ| = |QR| = |RB| = \frac{1}{4}|AB|.$$

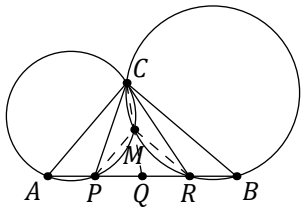
Dokážte, že priesečník kružníc opísaných trojuholníkom APC a BRC rôzny od bodu C je stred úsečky CQ.

Peter Novotný

Riešenie 1

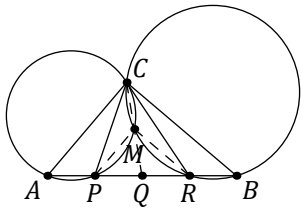
Nech M je stred úsečky CQ.

Keďže PM a RM sú stredné priečky trojuholníkov AQC a BQC, ktoré sú podľa Tálesovej vety rovnoramenné s hlavným vrcholom Q, sú štvoruholníky $CAPM$ a $CBRM$ rovnoramenné lichobežníky so základňami AC, resp. BC a im opísané kružnice, ktoré sa pretínajú v bodoch C a M, sú zároveň aj opísané trojuholníkom APC a BRC.



Riešenie 2

Nech M je priesečník kružníc opísaných trojuholníkom APC a BRC rôzny od bodu C.



Keďže $|QP| \cdot |QA| = |QR| \cdot |QB|$, bod Q má k obom týmto kružniciam rovnakú mocnosť, leží teda na ich chordále CM.

Podľa Tálesovej vety $|QC| = \frac{1}{2}|AB|$. Z vety o mocnosti bodu ku kružnici potom

$$|QM| \cdot \frac{1}{2}|AB| = |QP| \cdot |QA| = \frac{1}{4}|AB| \cdot \frac{1}{2}|AB|,$$

$$|QM| = \frac{1}{4}|AB| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}|CQ|,$$

takže M je stred úsečky CQ.

Edičná poznámka

Pôvodné zadanie nanucovalo riešiteľovi označenie oboch stotožňovaných bodov, jedno z nich nepoužilo dokonca ani v riešení.