57. ročník MO, úloha C-II-4

Nájdite všetky trojice celých čísel (x, y, z) takých, že

$$x + y\sqrt{3} + z\sqrt{7} = y + z\sqrt{3} + x\sqrt{7}.$$

Ján Mazák

Riešenie

Platí

$$x - y = \left(z\sqrt{3} - y\sqrt{3}\right) + \left(x\sqrt{7} - z\sqrt{7}\right),$$
$$x - y = \sqrt{3}(z - y) + \sqrt{7}(x - z),$$
$$(x - y)^2 = 3(z - y)^2 + 2\sqrt{3}(z - y)\sqrt{7}(x - z) + 7(x - z)^2,$$
$$(x - y)^2 - 3(z - y)^2 - 7(x - z)^2 = 2\sqrt{21}(z - y)(x - z).$$

Rozoberme prípady:

- Nech $z - y \neq 0$ a $x - z \neq 0$.
  Potom
  $$\frac{(x - y)^2 - 3(z - y)^2 - 7(x - z)^2}{2(z - y)(x - z)} = \sqrt{21},$$
  čo je spor s iracionalitou $\sqrt{21}$.
  Tento prípad teda nenastáva.
- Nech $z - y \neq 0$ a $x - z = 0$.
  Potom
  $$x - y = \sqrt{3}(z - y) + \sqrt{7} \cdot 0,$$
  $$x - y = \sqrt{3}(z - y) + 0,$$
  $$x - y = \sqrt{3}(z - y),$$
  $$\frac{x - y}{z - y} = \sqrt{3},$$
  čo je spor s iracionalitou $\sqrt{3}$.
  Tento prípad teda nenastáva.
- Nech $z - y = 0$ a $x - z \neq 0$.
  Potom
  $$x - y = \sqrt{3} \cdot 0 + \sqrt{7}(x - z),$$
  $$x - y = 0 + \sqrt{7}(x - z),$$
  $$x - y = \sqrt{7}(x - z),$$
  $$\frac{x - y}{x - z} = \sqrt{7},$$
  čo je spor s iracionalitou $\sqrt{7}$.
  Tento prípad teda nenastáva.
- Nech $z - y = 0$ a $x - z = 0$.
  To teda znamená, že $z = y = x$.
  V takom prípade však rovnica zo zadania platí triviálne.

Riešenia sú teda práve všetky trojice (x, x, x), kde x je celé číslo.