57. ročník MO, úloha A-II-1

Nájdite všetky štvorice (p, q, r, s) navzájom rôznych reálnych čísel také, že p a q sú korene rovnice

$$x^2 + rx + s - 1 = 0$$

a r a s korene rovnice

$$px^2 + p(q-1)x + 12 = 0.$$

Tomáš Juríik

Riešenie

Podľa Viètových vzťahov pre prvú rovnicu

$$p + q = -r,$$
$$pq = s - 1,$$

t. j.

$$r = -p - q,$$
$$s = pq + 1.$$

V prípade $p = 0$, by bola druhá rovnica

$$0x^2 + 0(q-1)x + 12 = 0,$$
$$0 + 0 + 12 = 0,$$
$$12 = 0,$$

čo by bol spor. Preto $p \neq 0$, takže druhá rovnica je ekvivalentná

$$x^2 + (q-1)x + \frac{12}{p} = 0.$$

Podľa Viètových vzťahov

$$r + s = -(q-1),$$
$$rs = \frac{12}{p}.$$

Z prvého dostávame

$$(-p - q) + (pq + 1) = -q + 1,$$
$$pq = p,$$
$$q = 1,$$

lebo $p \neq 0$. Z druhého

$$(-p - q)(pq + 1) = \frac{12}{p},$$
$$(-p - 1)(p \cdot 1 + 1) = \frac{12}{p},$$
$$-(p+1)(p+1) = \frac{12}{p},$$
$$p(p+1)(p+1) = -12,$$
$$p\left(p^2 + 2p + 1\right) = -12,$$
$$p^3 + 2p^2 + p = -12,$$
$$p^3 + 2p^2 + p + 12 = 0,$$
$$\left(p^3 + 3p^2\right) + \left(-p^2 - 3p\right) + (4p + 12) = 0,$$
$$p^2(p+3) - p(p+3) + 4(p+3) = 0,$$
$$\left(p^2 - p + 4\right)(p+3) = 0,$$

$$\left(\left(p^2 - p + \frac{1}{4}\right) + \frac{15}{4}\right)(p+3) = 0,$$

$$\left(\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}\right)(p+3) = 0,$$

a keďže prvý činiteľ je kladný,

$$p + 3 = 0,$$

$$p = -3.$$

Potom

$$r = -(-3) - 1 = 3 - 1 = 2$$

a

$$s = (-3) \cdot 1 + 1 = -3 + 1 = -2.$$

Zhrnutím teda $(p, q, r, s) = (-3, 1, 2, -2)$.
Keďže platí

$$p + q = (-3) + 1 = -2 = r,$$

$$pq = (-3) \cdot 1 = -3 = (-2) - 1 = s - 1,$$

čísla p a q sú korene rovnice $x^2 + rx + s - 1 = 0$.
Keďže platí

$$r + s = 2 + (-2) = 0 = 1 - 1 = q - 1,$$

$$rs = 2 \cdot (-2) = -4 = \frac{12}{-3} = \frac{12}{p},$$

čísla r a s sú korene rovnice $x^2 + (q-1)x + \frac{12}{p} = 0$, t. j. aj $px^2 + p(q-1)x + 12 = 0$.
Jediná vyhovujúca štvorica je teda $(-3, 1, 2, -2)$.