56. ročník MO, úloha A-S-1

Určte všetky reálne čísla s také, že rovnica

$$4x^4 - 20x^3 + sx^2 + 22x - 2 = 0$$

s neznámou x má štyri rôzne reálne korene a súčin dvoch z nich je -2.

Jaromír Šimša

Riešenie

Nech a, b, c, d sú tieto štyri korene, pričom $ab = -2$. Ekvivalentne platí

$$x^4 - 5x^3 - \frac{s}{4}x^2 + \frac{11}{2}x - \frac{1}{2} = 0,$$

podľa Viétových vzťahov teda

$$a + b + c + d = 5,$$

$$abc + abd + acd + bcd = -\frac{11}{2},$$

$$abcd = -\frac{1}{2}.$$

Z tretej rovnice

$$(-2)cd = -\frac{1}{2},$$

$$cd = \frac{1}{4},$$

z druhej rovnice potom

$$ab(c + d) + cd(a + b) = -\frac{11}{2},$$

$$(-2)(c + d) + \frac{1}{4}(a + b) = -\frac{11}{2},$$

$$-8(c + d) + (a + b) = -22,$$

$$a + b = 8(c + d) - 22.$$

Z prvej rovnice potom

$$(8(c + d) - 22) + (c + d) = 5,$$

$$9(c + d) = 27,$$

$$c + d = 3,$$

z čoho

$$a + b = 8 \cdot 3 - 22 = 24 - 22 = 2.$$

Keďže $a + b = 2$ a $ab = -2$, podľa Viètových vzťahov sú a a b korene kvadratickej rovnice

$$x^2 - 2x + (-2) = 0,$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0,$$

takže

$$\{a, b\} = \left\{\frac{-(-2) - \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}, \frac{-(-2) + \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}\right\}$$

$$= \left\{\frac{2 - \sqrt{4 + 8}}{2}, \frac{2 + \sqrt{4 + 8}}{2}\right\} = \left\{\frac{2 - \sqrt{12}}{2}, \frac{2 + \sqrt{12}}{2}\right\} = \left\{\frac{2 - 2\sqrt{3}}{2}, \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2}\right\} = \left\{1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\right\}.$$

Keďže $c + d = 3$ a $cd = \frac{1}{4}$, podľa Viètových vzťahov sú c a d korene kvadratickej rovnice

$$x^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0,$$

takže

$$\{c,d\} = \left\{ \frac{-(-3) - \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}}}{2 \cdot 1}, \frac{-(-3) + \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}}}{2 \cdot 1} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{3 - \sqrt{9-1}}{2}, \frac{3 + \sqrt{9-1}}{2} \right\} = \left\{ \frac{3 - \sqrt{8}}{2}, \frac{3 + \sqrt{8}}{2} \right\} = \left\{ \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}, \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2} \right\} = \left\{ \frac{3}{2} - \sqrt{2}, \frac{3}{2} + \sqrt{2} \right\}.$$

Čísla $1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\ \frac{3}{2} - \sqrt{2}, \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ sú teda korene rovnice

$$\left(x^2 - 2x - 2\right)\left(x^2 - 3x + \frac{1}{4}\right) = 0,$$

t. j. ekvivalentne

$$x^4 - 3x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 2x^3 + 6x^2 - \frac{1}{2}x - 2x^2 + 6x - \frac{1}{2} = 0,$$

$$x^4 - 5x^3 + \frac{17}{4}x^2 + \frac{11}{2}x - \frac{1}{2} = 0,$$

$$4x^4 - 20x^3 + 17x^2 + 22x - 2 = 0.$$

Pritom sú rôzne a

$$\left(1 - \sqrt{3}\right)\left(1 + \sqrt{3}\right) = 1 - 3 = -2.$$

Jediná vyhovujúca hodnota s je teda 17.

Edičná poznámka

Aj druhé pôvodné riešenie pracovalo s Viètovými vzťahmi, navyše však aj s polynómami.