55. ročník MO, úloha A-S-1

Nájdite všetky dvojice celých čísel (x, y) takých, že

$$\sqrt{x\sqrt{5}} - \sqrt{y\sqrt{5}} = \sqrt{6\sqrt{5} - 10}.$$

Jozef Moravčík

Riešenie

Nech (x, y) je vyhovujúca dvojica. Potom

$$\sqrt{x\sqrt{5}} - \sqrt{y\sqrt{5}} \geq 0,$$
$$\sqrt{x\sqrt{5}} \geq \sqrt{y\sqrt{5}},$$
$$x\sqrt{5} \geq y\sqrt{5},$$
$$x \geq y.$$

Za tohto predpokladu ekvivalentne

$$x\sqrt{5} - 2\sqrt{x\sqrt{5}}\sqrt{y\sqrt{5}} + y\sqrt{5} = 6\sqrt{5} - 10,$$
$$x\sqrt{5} - 2\sqrt{x\sqrt{5} \cdot y\sqrt{5}} + y\sqrt{5} = 6\sqrt{5} - 10,$$
$$x\sqrt{5} - 2\sqrt{5xy} + y\sqrt{5} = 6\sqrt{5} - 10,$$
$$x\sqrt{5} - 2\sqrt{5}\sqrt{xy} + y\sqrt{5} = 6\sqrt{5} - 10,$$
$$x - 2\sqrt{xy} + y = 6 - 2\sqrt{5},$$
$$x + y - 6 = 2\sqrt{xy} - 2\sqrt{5},$$
$$(x + y - 6)^2 = 4xy - 2 \cdot 2\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{5} + 50,$$
$$(x + y - 6)^2 = 4xy - 8\sqrt{5xy} + 50,$$
$$8\sqrt{5xy} = 50 - (x + y - 6)^2,$$
$$\sqrt{5xy} = \frac{50 - (x + y - 6)^2}{8}.$$

Druhá odmocnina z (nezáporného) celého čísla je teda racionálne číslo, takže je to prirodzené číslo. Označme ho n, potom

$$\sqrt{5xy} = n,$$
$$5xy = n^2.$$

Z toho 5 delí n^2, takže delí aj n. Existuje teda prirodzené číslo k také, že $n = 5k$. Potom

$$5xy = (5k)^2,$$
$$5xy = 5^2k^2,$$
$$xy = 5k^2.$$

Keďže

$$x + y - 6 = 2\sqrt{xy} - 2\sqrt{5},$$

platí

$$x + y - 6 = 2\sqrt{5k^2} - 2\sqrt{5},$$
$$x + y - 6 = 2k\sqrt{5} - 2\sqrt{5},$$
$$x + y - 6 = 2(k - 1)\sqrt{5}.$$

Rozoberme prípady:

- Nech $k-1 \neq 0$.

  Potom
  $$\frac{x+y-6}{2(k-1)} = \sqrt{5},$$
  čo je však spor s iracionalitou čísla $\sqrt{5}$.

- Nech $k-1 = 0$.

  Potom
  $$x+y-6 = 2 \cdot 0 \cdot \sqrt{5} = 0,$$
  $$x+y = 6$$
  a
  $$xy = 5 \cdot 1^2 = 5 \cdot 1 = 5.$$
  Podľa Viètových vzťahov sú x a y práve korene kvadratickej rovnice
  $$t^2 - 6t + 5 = 0,$$
  t. j.
  $$(t-1)(t-5) = 0,$$
  takže
  $$\{x, y\} = \{1, 5\},$$
  a keďže $x \geq y$,
  $$(x, y) = (5, 1).$$
  Pretože vtedy
  $$x+y-6 = 5+1-6 = 0 = 2\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5 \cdot 1} - 2\sqrt{5} = 2\sqrt{xy} - 2\sqrt{5},$$
  je to naozaj riešenie rovnice zo zadania.

Jediné riešenie je teda $(5, 1)$.