**43. ročník MO, úloha A-II-4**

Rozhodnite, či existujú celé čísla $p$, $q$, $r$ také, že rovnica $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ má v obore reálnych čísel jediný koreň $1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.

Jaromír Šimša

**Riešenie 1**

Dokážeme pomocné tvrdenie:

- Nech $a$, $b$, $c$ sú celé čísla také, že $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0$. Potom $a = b = c = 0$.
  - Platí
$$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0,$$
$$\left(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}\right)\sqrt[3]{2} = 0,$$
$$a\sqrt[3]{2} + b\sqrt[3]{4} + 2c = 0,$$
$$2c + a\sqrt[3]{2} + b\sqrt[3]{4} = 0.$$
  Potom
$$c\left(2c + a\sqrt[3]{2} + b\sqrt[3]{4}\right) - b\left(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}\right) = c \cdot 0 - b \cdot 0,$$
$$\left(2c^2 + ac\sqrt[3]{2} + bc\sqrt[3]{4}\right) + \left(-ab - b^2\sqrt[3]{2} - bc\sqrt[3]{4}\right) = 0 - 0,$$
$$2c^2 - ab = b^2\sqrt[3]{2} - ac\sqrt[3]{2},$$
$$2c^2 - ab = \left(b^2 - ac\right)\sqrt[3]{2}.$$
  Rozoberme prípady:
  - Nech $b^2 - ac \neq 0$.
    Potom
$$\frac{2c^2 - ab}{b^2 - ac} = \sqrt[3]{2},$$
    čo je spor s iracionalitou $\sqrt[3]{2}$.
  - Nech $b^2 - ac = 0$.
    Potom
$$b^2 = ac,$$
$$b^3 = abc,$$
    a
$$2c^2 - ab = 0 \cdot \sqrt[3]{2},$$
$$2c^2 - ab = 0,$$
$$2c^2 = ab,$$
$$2c^3 = abc,$$
    takže
$$b^3 = 2c^3.$$
    Rozoberme prípady:
    - Nech $c \neq 0$.
      Potom
$$\frac{b^3}{c^3} = 2,$$
$$\left(\frac{b}{c}\right)^3 = 2,$$
$$\frac{b}{c} = \sqrt[3]{2},$$
      čo je spor s iracionalitou $\sqrt[3]{2}$.

- Nech $c = 0$.
  Potom
  $$b^3 = 2 \cdot 0^3,$$
  $$b^3 = 2 \cdot 0,$$
  $$b^3 = 0,$$
  $$b = 0.$$
  Z pôvodnej rovnice
  $$a + 0 \cdot \sqrt[3]{2} + 0 \cdot \sqrt[3]{4} = 0,$$
  $$a + 0 + 0 = 0,$$
  $$a = 0.$$
  Platí teda $a = b = c = 0$.

Tento koreň označme $t$. Potom platí

$$t^2 = \left(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)^2 = 1^2 + \sqrt[3]{2}^2 + \sqrt[3]{4}^2 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt[3]{2} + 2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} + 2 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot 1$$
$$= 1 + \sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} + 4 + 2\sqrt[3]{4} = 5 + 4\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}$$

a

$$t^3 = \left(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)^3 = \left(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)^2 \left(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right) = \left(5 + 4\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}\right)\left(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)$$
$$= \left(5 + 5\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{4}\right) + \left(4\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{4} + 8\right) + \left(3\sqrt[3]{4} + 6 + 6\sqrt[3]{2}\right) = 19 + 15\sqrt[3]{2} + 12\sqrt[3]{4}.$$

Keďže $t$ je koreň rovnice zo zadania, platí

$$t^3 + pt^2 + qt + r = 0,$$
$$\left(19 + 15\sqrt[3]{2} + 12\sqrt[3]{4}\right) + p\left(5 + 4\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}\right) + q\left(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right) + r = 0,$$
$$(19 + 5p + q + r) + (15 + 4p + q)\sqrt[3]{2} + (12 + 3p + q)\sqrt[3]{4} = 0.$$

Podľa pomocného tvrdenia platí

$$19 + 5p + q + r = 0,$$
$$15 + 4p + q = 0,$$
$$12 + 3p + q = 0.$$

Z toho

$$(15 + 4p + q) - (12 + 3p + q) = 0 - 0,$$
$$3 + p = 0,$$
$$p = -3,$$

takže

$$12 + 3(-3) + q = 0,$$
$$12 - 9 + q = 0,$$
$$q = -3,$$

a potom

$$19 + 5(-3) + (-3) + r = 0,$$
$$19 - 15 - 3 + r = 0,$$
$$r = -1.$$

Rovnica zo zadania je teda $x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$. Potom pre každý jej reálny koreň $x$ platí

$$x^3 = 3x^2 + 3x + 1 = 3x^2 + 3x + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\left(4x^2 + 4x + 1\right) + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}(2x + 1)^2 + \frac{1}{4} > 0,$$
$$x > 0.$$

Potom platí

$$1 = \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3},$$

a keďže pravá strana je na kladných číslach klesajúca, existuje najviac jeden koreň tejto rovnice, a teda aj rovnice $x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$. Ukážeme, že je to práve $t$:

$$t^3 - 3t^2 - 3t - 1 = \left(19 + 15\sqrt[3]{2} + 12\sqrt[3]{4}\right) - 3\left(5 + 4\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}\right) - 3\left(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right) - 1$$
$$= 19 + 15\sqrt[3]{2} + 12\sqrt[3]{4} - 15 - 12\sqrt[3]{2} - 9\sqrt[3]{4} - 3 - 3\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{4} - 1 = 0.$$

Odpoveď na otázku zo zadania je teda pozitívna.

---

**Riešenie 2**

Tento koreň označme $t$. Potom platí

$$\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)t = \left(\sqrt[3]{2} - 1\right)\left(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right) = \left(\sqrt[3]{2} - 1\right)\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1\right) = \sqrt[3]{2}^3 - 1 = 2 - 1 = 1,$$

takže

$$t = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}.$$

Potom ekvivalentne

$$\frac{1}{t} = \sqrt[3]{2} - 1,$$
$$\frac{1}{t} + 1 = \sqrt[3]{2},$$
$$\left(\frac{1}{t} + 1\right)^3 = 2.$$

Číslo $t$ je teda jediný reálny koreň rovnice

$$\left(\frac{1}{x} + 1\right)^3 = 2,$$

t. j. ekvivalentne

$$\frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x} + 1 = 2,$$
$$0 = 1 - \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3},$$

čo je ekvivalentné rovnici

$$0 = x^3 - 3x^2 - 3x - 1,$$

lebo 0 nie je jej koreň.

Hľadaná trojica $(p, q, r)$ teda existuje, a to $(-3, -3, -1)$.

---

**Poznámka**

Alternatívny dôkaz pomocného tvrdenia je súčasťou riešenia úlohy 43-A-I-4.

---

**Edičná poznámka**

Pôvodné zadanie kvantifikovalo rovnicu, kvantifikovať však možno iba premenné.