43. ročník MO, úloha A-I-4

Nájdite prirodzené číslo n také, že existujú racionálne čísla p a q také, že

$$\sqrt[3]{n} = p + q\sqrt[3]{2}.$$

Riešenie

Ukážeme, že $n \neq 4$. Nech p a q sú také racionálne čísla, že

$$\sqrt[3]{4} = p + q\sqrt[3]{2}.$$

Potom ekvivalentne

$$\begin{gathered}
4 = \left(p + q\sqrt[3]{2}\right)^3, \\
4 = p^3 + 3\sqrt[3]{2}p^2q + 3\sqrt[3]{4}pq^2 + 2q^3, \\
4 = p^3 + 3\sqrt[3]{2}p^2q + 3\left(p + q\sqrt[3]{2}\right)pq^2 + 2q^3, \\
4 = p^3 + 3\sqrt[3]{2}p^2q + 3p^2q^2 + 3\sqrt[3]{2}pq^3 + 2q^3, \\
4 - p^3 - 2q^3 - 3p^2q^2 = 3\sqrt[3]{2}p^2q + 3\sqrt[3]{2}pq^3, \\
4 - p^3 - 2q^3 - 3p^2q^2 = 3\sqrt[3]{2}pq\left(p + q^2\right).
\end{gathered}$$

Rozoberme prípady:

- Nech $pq\left(p + q^2\right) \neq 0$.
  Potom
  $$\frac{4 - p^3 - 2q^3 - 3p^2q^2}{3pq\left(p + q^2\right)} = \sqrt[3]{2},$$
  čo je spor s iracionalitou čísla $\sqrt[3]{2}$.
  Tento prípad teda nenastáva.
- Nech $pq\left(p + q^2\right) = 0$.
  Potom
  $$\begin{gathered}
  4 - p^3 - 2q^3 - 3p^2q^2 = 3\sqrt[3]{2} \cdot 0, \\
  4 - p^3 - 2q^3 - 3p^2q^2 = 0.
  \end{gathered}$$
  Rozoberme prípady:
  - Nech $p = 0$.
    Potom
    $$\begin{gathered}
    4 - 0^3 - 2q^3 - 3 \cdot 0^2q^2 = 0, \\
    4 - 0 - 2q^3 - 0 = 0, \\
    4 = 2q^3, \\
    2 = q^3, \\
    \sqrt[3]{2} = q, \\
    \sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q},
    \end{gathered}$$
    čo je spor.
    Tento prípad teda nenastáva.
  - Nech $q = 0$.
    Potom
    $$\begin{gathered}
    4 - p^3 - 2 \cdot 0^3 - 3p^2 \cdot 0^2 = 0, \\
    4 - p^3 - 0 - 0 = 0, \\
    4 = p^3, \\
    \sqrt[3]{4} = p, \\
    \sqrt[3]{4} \in \mathbb{Q},
    \end{gathered}$$
    čo je spor.
    Tento prípad teda nenastáva.

- Nech $p + q^2 = 0$.
  Potom $p = -q^2$, takže
  $$4 - \left(-q^2\right)^3 - 2q^3 - 3\left(-q^2\right)^2 q^2 = 0,$$
  $$4 - \left(-q^6\right) - 2q^3 - 3q^4 q^2 = 0,$$
  $$4 + q^6 - 2q^3 - 3q^6 = 0,$$
  $$0 = 2q^6 + 2q^3 - 4,$$
  $$0 = q^6 + q^3 - 2,$$
  $$0 = \left(q^3 - 1\right)\left(q^3 + 2\right),$$
  $$0 = \left(q^3 - 1\right)\left(q^3 - (-2)\right),$$
  $$q^3 \in \{1, -2\},$$
  $$q \in \{1, -\sqrt[3]{2}\},$$
  $$q = 1.$$
  Potom
  $$p = -1^2 = -1.$$
  Z toho
  $$\sqrt[3]{4} = -1 + \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{4},$$
  čo je spor.
  Tento prípad teda nenastáva.

Nech n je vyhovujúce číslo a p a q príslušné racionálne čísla. Rozoberme prípady:

- Nech $p = 0$.
  Potom ekvivalentne
  $$\sqrt[3]{n} = 0 + q\sqrt[3]{2},$$
  $$\sqrt[3]{n} = q\sqrt[3]{2},$$
  $$n = q^3 \cdot 2,$$
  $$n = 2q^3.$$
  Keďže n je prirodzené číslo, aj q je prirodzené číslo.
- Nech $q = 0$.
  Potom ekvivalentne
  $$\sqrt[3]{n} = p + 0\sqrt[3]{2},$$
  $$\sqrt[3]{n} = p + 0,$$
  $$\sqrt[3]{n} = p,$$
  $$n = p^3.$$
  Keďže n je prirodzené číslo, aj p je prirodzené číslo.
- Nech $p \neq 0$ a $q \neq 0$.
  Potom ekvivalentne
  $$n = \left(p + q\sqrt[3]{2}\right)^3,$$
  $$n = p^3 + 3\sqrt[3]{2}p^2 q + 3\sqrt[3]{2}^2 pq^2 + 2q^3,$$
  $$n - \left(p^3 + 2q^3\right) = \left(3\sqrt[3]{2}p^2 q + 3\sqrt[3]{2}^2 pq^2\right),$$
  $$n - \left(p^3 + 2q^3\right) = 3\sqrt[3]{2}pq\left(p + q\sqrt[3]{2}\right),$$
  $$n - \left(p^3 + 2q^3\right) = 3\sqrt[3]{2}pq \cdot \sqrt[3]{n},$$
  $$n - \left(p^3 + 2q^3\right) = 3pq \cdot \sqrt[3]{2n},$$

$$\frac{n-\left(p^3+2q^3\right)}{3pq}=\sqrt[3]{2n},$$

takže číslo $\sqrt[3]{2n}$ je racionálne. Keďže $2n$ je nenulové prirodzené číslo, aj $\sqrt[3]{2n}$ je nenulové prirodzené číslo. Ak ho označíme k, tak

$$\sqrt[3]{2n}=k,$$
$$2n=k^3,$$

takže k je párne. Existuje teda nenulové prirodzené číslo m také, že $k=2m$. Potom

$$2n=(2m)^3,$$
$$2n=8m^3,$$
$$n=4m^3.$$

Z toho

$$\sqrt[3]{4m^3}=p+q\sqrt[3]{2},$$
$$\sqrt[3]{4}m=p+q\sqrt[3]{2},$$
$$\sqrt[3]{4}=\frac{p}{m}+\frac{q}{m}\sqrt[3]{2}.$$

Keďže čísla $\frac{p}{m}$ a $\frac{q}{m}$ sú racionálne čísla, číslo 4 vyhovuje zadaniu, čo je spor.
Tento prípad teda nenastáva.

Zhrnutím dostávame, že vyhovujú práve čísla tvaru r^3 a $2r^3$, kde r je prirodzené číslo.

Edičná poznámka

V pôvodnom zadaní sa požadovalo $n>2$, táto podmienka však na riešenie iba ten vplyv, že v závere treba vylúčiť 1 a 2.