42. ročník MO, úloha A-I-2

Nájdite všetky hodnoty p také, že existujú reálne čísla x, y, z také, že

$$x + y + z = 4,$$
$$xy + yz + zx = 4,$$
$$xyz = p.$$

Riešenie 1

Nech f_p je funkcia definovaná vzťahom

$$f_p(t) = t^3 - 4t^2 + 4t - p,$$

potom podľa Viètových vzťahov sú x, y, z všetky korene rovnice $f_p(t) = 0$ včítane násobnosti. Hľadáme teda všetky hodnoty p také, že graf funkcie f_p buď pretne vodorovnú os 3-krát, alebo ju pretne raz a raz sa jej dotkne.

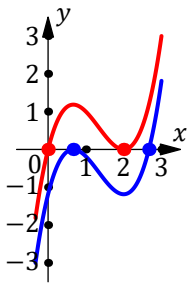
Pre každé t z $\mathbb{R}$ platí

$$f_p(t) - f_0(t) = \left(t^3 - 4t^2 + 4t - p\right) - \left(t^3 - 4t^2 + 4t - 0\right) = -p,$$

takže graf funkcie f_p je oproti grafu funkcie f_0 o $-p$ nahor, t. j. o p nadol.

Platí:

- $$f_0(t) = t^3 - 4t^2 + 4t - 0 = t^3 - 4t^2 + 4t = t\left(t^2 - 4t + 4\right) = t(t-2)^2,$$
  takže f_0 má jednonásobný koreň 0 a dvojnásobný 2.
- $$f_{\frac{32}{27}}(t) = t^3 - 4t^2 + 4t - \frac{32}{27} = \left(t - \frac{2}{3}\right)\left(t - \frac{2}{3}\right)\left(t - \frac{8}{3}\right) = \left(t - \frac{2}{3}\right)^2\left(t - \frac{8}{3}\right),$$
  takže $f_{\frac{32}{27}}$ má dvojnásobný koreň $\frac{2}{3}$ a jednonásobný $\frac{8}{3}$.



Platí teda:

- Ak $p < 0$ alebo $p > \frac{32}{27}$, graf f_p má s vodorovnou osou len jeden priesečník, príslušné čísla x, y, z, teda neexistujú.
- Ak $p = 0$ alebo $p = \frac{32}{27}$, graf f_p má s vodorovnou osou dva priesečníky, príslušné čísla x, y, z, teda existujú, pričom dve z nich sú rovnaké.
- Ak $0 < p < \frac{32}{27}$, graf f_p má s vodorovnou osou tri priesečníky, príslušné čísla x, y, z, teda existujú, pričom všetky tri sú rôzne.

Hľadané hodnoty parametra p sú teda práve prvky intervalu $\left[0, \frac{32}{27}\right]$.

Poznámka

Kritickú hodnotu $\frac{32}{27}$ možno nájsť takto: Podobne ako v ďalšej kritickej hodnote 0 je aj tu jeden koreň dvojnásobný, t. j. napríklad $x = y$. Potom podľa zadania

$$y + y + z = 4,$$

$$yy + yz + zy = 4,$$

t. j.

$$z = 4 - 2y,$$

$$2yz + y^2 - 4 = 0.$$

Po dosadení prvej rovnice do druhej

$$2y(4 - 2y) + y^2 - 4 = 0,$$

$$\left(8y - 4y^2\right) + y^2 - 4 = 0,$$

$$-3y^2 + 8y - 4 = 0,$$

$$3y^2 - 8y + 4 = 0,$$

$$y \in \left\{\frac{-(-8) - \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3}, \frac{-(-8) + \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3}\right\}$$

$$= \left\{\frac{8 - \sqrt{64 - 48}}{6}, \frac{8 + \sqrt{64 - 48}}{6}\right\} = \left\{\frac{8 - \sqrt{16}}{6}, \frac{8 + \sqrt{16}}{6}\right\} = \left\{\frac{8 - 4}{6}, \frac{8 + 4}{6}\right\} = \left\{\frac{4}{6}, \frac{12}{6}\right\} = \left\{\frac{2}{3}, 2\right\}.$$

Potom

$$(y, z) \in \left\{\left(\frac{2}{3}, 4 - 2 \cdot \frac{2}{3}\right), (2, 4 - 2 \cdot 2)\right\} = \left\{\left(\frac{2}{3}, \frac{12 - 2 \cdot 2}{3}\right), (2, 4 - 4)\right\}$$

$$= \left\{\left(\frac{2}{3}, \frac{12 - 4}{3}\right), (2, 0)\right\} = \left\{\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right), (2, 0)\right\},$$

takže

$$(y, z, p) = \left(y, z, y^2 z\right) \in \left\{\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{3}\right), (2, 0, 2 \cdot 2 \cdot 0)\right\} = \left\{\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, \frac{32}{27}\right), (2, 0, 0)\right\}.$$

Riešenie 2

Nech f_p je funkcia definovaná vzťahom

$$f_p(t) = t^3 - 4t^2 + 4t - p,$$

potom podľa Viètových vzťahov sú x, y, z všetky korene rovnice $f_p(t) = 0$ včítane násobnosti. Hľadáme teda všetky hodnoty p také, že graf funkcie f_p buď pretne vodorovnú os 3-krát, alebo ju pretne raz a raz sa jej dotkne.

Platí

$$f_p'(t) = 3t^2 - 8t + 4$$

a

$$f_p''(t) = 6t - 8.$$

Potom sú nasledujúce podmienky ekvivalentné:

$$f'(t) = 0,$$

$$3t^2 - 8t + 4 = 0,$$

$$t^2 - \frac{8}{3}t + \frac{4}{3} = 0,$$

$$\left(t - \frac{2}{3}\right)(t - 2) = 0,$$

$$t \in \left\{\frac{2}{3}, 2\right\}.$$

Pritom

$$f_p''\left(\frac{2}{3}\right) = 6 \cdot \frac{2}{3} - 8 = 4 - 8 = -4 < 0$$

a

$$f_p''(2) = 6 \cdot 2 - 8 = 12 - 8 = 4 > 0,$$

takže funkcia f_p na intervale $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$ všade rastie, na intervale $\left[\frac{2}{3}, 2\right]$ všade klesá a na intervale $[2, \infty)$ všade rastie. Má teda v $\frac{2}{3}$ lokálne maximum a v 2 lokálne minimum. Funkcia f_p teda má 3 reálne korene (včítane násobnosti) práve vtedy, keď

$$\left(f_p\left(\frac{2}{3}\right) \geq 0\right) \wedge \left(f_p(2) \leq 0\right),$$

$$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{3}\right) - p \geq 0\right) \wedge \left(2^3 - 4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - p \leq 0\right),$$

$$\left(\frac{8}{27} - 4 \cdot \frac{4}{9} + \frac{8}{3} \geq p\right) \wedge (8 - 16 + 8 \leq p),$$

$$\left(\frac{8 - 16 \cdot 3 + 8 \cdot 9}{27} \geq p\right) \wedge (0 \leq p),$$

$$\left(\frac{8 - 48 + 72}{27} \geq p\right) \wedge (0 \leq p),$$

$$\left(\frac{32}{27} \geq p\right) \wedge (0 \leq p),$$

$$p \in \left[0, \frac{32}{27}\right].$$

Edičná poznámka

Prvé riešenie je pridané.