40. ročník MO, úloha B-I-6

Nech α, β, γ sú veľkosti uhlov v trojuholníku. Dokážte, že

$$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Riešenie

Použijeme jednu z Jensenových nerovností:

- Nech f je funkcia konkávna na množine $[a, b]$. Nech n je nenulové prirodzené číslo, x_1, ..., x_n sú čísla z $[a, b]$ a c_1, ..., c_n sú čísla z $[0, 1]$ také, že $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$. Potom

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i).$$

Podľa nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom a podľa Jensenovej nerovnosti pre funkciu sin, ktorá je konkávna na $[0, \pi]$, platí

$$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = \left(\sqrt[3]{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}\right)^3 \leq \left(\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3}\right)^3$$

$$\leq \left(\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3 = \left(\sin\frac{180^\circ}{3}\right)^3 = (\sin 60^\circ)^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$