37. ročník MO, úloha B-I-3

Rozhodnite, či existuje nenulové zobrazenie f množiny mrežových bodov do množiny reálnych čísel také, že ak ABC je pravouhlý trojuholník s vrcholmi v mrežových bodoch

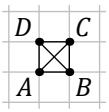
a) s odvesnami dĺžky 1,

b) s odvesnami dĺžky 1 a osou pravého uhla rovnobežnou s osou prvého kvadrantu,

tak $f(A) + f(B) + f(C) = 0$.

Riešenie

a) Nech A a B sú ľubovoľné dva susedné mrežové body. Nech C a D sú mrežové body také, že $ABCD$ je štvorec so stranou dĺžky 1.



Potom ACD a BCD sú pravouhlé trojuholníky s vrcholmi v mrežových bodoch s odvesnami dĺžky 1, takže platí

$$f(A) + f(C) + f(D) = 0 = f(B) + f(C) + f(D),$$
$$f(A) = f(B).$$

Ukážeme, že f je konštantná funkcia: Nech X a Y sú mrežové body také, že $f(X) \neq f(Y)$ a niektorá lomená čiara s krajnými bodmi X a Y, ktorej zlomy sú len mrežové body, je najkratšia možná: Nech Z je susedný mrežový bod bodu X na takejto najkratšej ceste, takže podľa predchádzajúceho odseku $f(X) = f(Z)$. Potom jej časť medzi bodmi Z a Y je kratšia než celá lomená čiara a platí $f(Z) = f(X) \neq f(Y)$, čo je však spor s minimalitou lomenej čiary medzi X a Y.

Nech A je ľubovoľný mrežový bod a B a C sú mrežové body také, že ABC je pravouhlý trojuholník s odvesnami dĺžky 1. Potom platí

$$f(A) = \frac{1}{3} \cdot 3f(A) = \frac{1}{3} \cdot (f(A) + f(B) + f(C)) = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0.$$

Zobrazenie f je teda nulové, čo je spor.

Hľadané zobrazenie teda neexistuje.

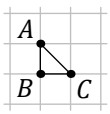
b) Nech f je zobrazenie z množiny všetkých mrežových bodov také, že

$$f(\langle x, y\rangle) = \begin{cases} 0, & \text{ak } (x-y) \bmod 3 = 0, \\ 1, & \text{ak } (x-y) \bmod 3 = 1, \\ -1, & \text{ak } (x-y) \bmod 3 = 2. \end{cases}$$

Ukážeme, že toto zobrazenie vyhovuje:

Nech ABC je pravouhlý trojuholník s pravým uhlom ABC s vrcholmi v mrežových bodoch, s odvesnami dĺžky 1 a osou pravého uhla ABC rovnobežnou s osou prvého kvadrantu. Nech $B = \langle x, y\rangle$. Rozoberme prípady:

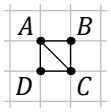
- Nech má os uhla ABC smer polosi prvého kvadrantu.
  Potom bez ujmy na všeobecnosti $A = \langle x, y+1\rangle$ a $C = \langle x+1, y\rangle$.



Keďže $((x+1)-y)-(x-y) = 1$ a $(x-(y+1))-(x-y) = -1$, čísla $x-y$, $(x+1)-y$, $x-(y+1)$ dávajú po delení 3 rôzne zvyšky. Jeden z nich je teda 0, druhý 1 a tretí 2, takže

$$f(A) + f(B) + f(C) = 0 + 1 + (-1) = 0.$$

- Nech má os uhla ABC smer polosi tretieho kvadrantu.
  Potom bez ujmy na všeobecnosti $A = \langle x, y-1\rangle$ a $C = \langle x-1, y\rangle$.
  Nech $D = \langle x-1, y-1\rangle$. Keďže $((x-1)-(y-1))-(x-y) = 0$, čísla $x-y$ a $(x-1)-(y-1)$ dávajú po delení 3 rovnaký zvyšok. Preto $f(B) = f(D)$.



  Keďže $ABCD$ je štvorec, ADC je je pravouhlý trojuholník s vrcholmi v mrežových bodoch s odvesnami dĺžky 1 taký, že osou pravého uhla ADC má smer polosi prvého kvadrantu. Preto podľa predchádzajúceho prípadu

$$f(A) + f(B) + f(C) = f(A) + f(D) + f(C) = 0.$$