35. ročník MO, úloha A-S-3b

V rovine s karteziánskou sústavou súradníc sú kruhy so stredmi S_1, resp. S_2 a s polomermi r_1, resp. r_2 také, že

$$\max\{r_1, r_2\} \leq |S_1S_2| \leq r_1 + r_2 - 2.$$

Dokážte, že prienik týchto kruhov obsahuje aspoň dva mrežové body.

Riešenie

Nech $\mathcal{K}_1$, resp. $\mathcal{K}_2$ sú predmetné kruhy. Nech P_1 a P_2 sú body polpriamok S_1S_2, resp. S_2S_1 také, že $|S_1P_1| = r_1$ a $|S_2P_2| = r_2$. Keďže $\max\{r_1, r_2\} \leq |S_1S_2|$, oba body ležia na úsečke S_1S_2, a keďže $|S_1S_2| \leq r_1 + r_2 - 2 < r_1 + r_2$, ležia na priamke S_1S_2 v poradí S_1, P_2, P_1, S_2. Platí

$$|S_1S_2| = |S_1P_2| + |P_1P_2| + |S_2P_1| = (|S_1P_2| + |P_1P_2|) + (|S_2P_1| + |P_1P_2|) - |P_1P_2| = |S_1P_1| + |S_2P_2| - |P_1P_2|,$$

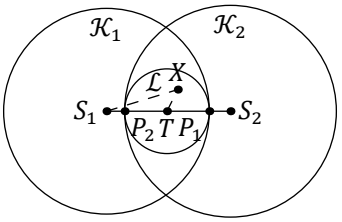
takže

$$|P_1P_2| = |S_1P_1| + |S_2P_2| - |S_1S_2| = r_1 + r_2 - |S_1S_2| \geq 2.$$

Nech $\mathcal{L}$ je kruh s priemerom P_1P_2 a T je jeho stred. Ak X je bod kruhu $\mathcal{L}$, tak platí

$$|S_1X| \leq |S_1T| + |TX| \leq |S_1T| + |TP_1| = |S_1P_1| = r_1,$$

takže X patrí aj do kruhu $\mathcal{K}_1$.



Kruh $\mathcal{L}$ je teda časťou kruhu $\mathcal{K}_1$. Analogicky je časťou kruhu $\mathcal{K}_2$, takže aj časťou ich prieniku. Má priemer $|P_1P_2|$, takže aspoň 2, a teda polomer aspoň 1.

Bod T leží v niektorom jednotkovom štvorci, a teda v jednom zo štyroch rovnoramenných trojuholníkov s preponou 1, na ktorý ho delia jeho uhlopriečky. Od každého jeho vrcholu je vzdialený najviac 1, je teda vzdialený najviac 1 aspoň od 2 vrcholov tohto jednotkového štvorca, čo sú mrežové body. Kruh so stredom T a s polomerom 1 obsahuje aspoň dva mrežové body, takže ich obsahuje aj s ním sústredný kruh $\mathcal{L}$, a teda aj prienik kruhov $\mathcal{K}_1$ a $\mathcal{K}_2$.

