35. ročník MO, úloha A-S-2

Nájdite všetky reálne čísla p také, že všetky korene rovnice $x^3 - 12x^2 + px - 64 = 0$ sú reálne a nezáporné.

Riešenie

Označme všetky tieto korene x_1, x_2, x_3. Podľa Viètových vzťahov potom platí

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12,$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = p,$$

$$x_1x_2x_3 = 64.$$

Podľa nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom platí

$$4 = \frac{12}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq \sqrt[3]{x_1x_2x_3} = \sqrt[3]{64} = 4,$$

takže nastáva rovnosť, a teda

$$x_1 = x_2 = x_3.$$

Potom

$$12 = x_1 + x_2 + x_3 = 3x_3,$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = 4.$$

Z toho

$$p = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 16 + 16 + 16 = 48.$$

Keďže

$$x^3 - 12x^2 + px - 64 = (x - 4)^3,$$

rovnica zo zadania má trojnásobný koreň 4, čo je naozaj nezáporné reálne číslo.