31. ročník MO, úloha A-III-3

Nájdite príklad konvexnej množiny obsahujúcej nekonečne veľa mrežových bodov takej, že na každej priamke leží len konečne jej prvkov.

Riešenie

Nech $\mathcal{M}$ je pás určený rovnobežkami s rovnicami $y = \sqrt{2}x$ a $y = \sqrt{2}x + 1$. Je to prienik dvoch polrovín určených týmito priamkami, takže je to konvexná množina.

Pre každé prirodzené číslo k priamka s rovnicou $x = k$ pretína množinu $\mathcal{M}$ v úsečke dĺžky 1, leží teda na nej aspoň jeden mrežový bod. Množina $\mathcal{M}$ teda obsahuje nekonečne veľa bodov.

Nech p je ľubovoľná priamka. Rozoberme prípady:

- Nech p je rôznobežná s týmito rovnobežkami.

  Potom p pretína množinu $\mathcal{M}$ v úsečke, a teda obsahuje len konečne mnoho jej mrežových bodov.

- Nech p nie je rovnobežná s týmito rovnobežkami.

  Potom jej rovnica je $y = \sqrt{2}x + q$, kde $q \in \mathbb{R}$. Nech na p ležia aspoň dva rôzne mrežové body $\langle x_1, y_1 \rangle$ a $\langle x_2, y_2 \rangle$, t. j. x_1, x_2, y_1, y_2 sú celé čísla, pričom $x_1 \neq x_2$. Potom

  $$y_1 - y_2 = \left(\sqrt{2}x_1 + q\right) - \left(\sqrt{2}x_2 + q\right) = \sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}x_2 = \sqrt{2}(x_1 - x_2),$$
  $$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \sqrt{2},$$

  čo je spor s iracionalitou $\sqrt{2}$.