29. ročník MO, úloha B-II-1

Nech korene rovnice

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

sú (s ohľadom na prípadnú násobnosť) x_1, x_2, x_3, a korene rovnice

$$x^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

(s ohľadom na prípadnú násobnosť) x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1. Vyjadrite d, e, f pomocou a, b, c.

Riešenie

Podľa Viètových vzťahov

$$-a = x_1 + x_2 + x_3,$$

$$b = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1,$$

$$-c = x_1x_2x_3$$

a

$$-d = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1,$$

$$e = (x_1x_2)(x_2x_3) + (x_2x_3)(x_3x_1) + (x_3x_1)(x_1x_2),$$

$$-f = (x_1x_2)(x_2x_3)(x_3x_1).$$

Z toho dostávame

$$d = -(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = -b,$$

$$e = x_1x_2x_3 \cdot x_2 + x_1x_2x_3 \cdot x_3 + x_1x_2x_3 \cdot x_1 = x_1x_2x_3(x_2 + x_3 + x_1) = (x_1 + x_2 + x_3)x_1x_2x_3 = (-a)(-c) = ac,$$

$$f = -(x_1x_2)(x_2x_3)(x_3x_1) = -x_1^2x_2^2x_3^2 = -(x_1x_2x_3)^2 = -(-c)^2 = -c^2.$$