26. ročník MO, úloha C-II-3b

Nech n je nenulové prirodzené číslo. Kocka s hranou dĺžky n je rozdelená na dva zhodné trojboké hranoly, ktoré majú ako podstavy pravouhlé rovnoramenné trojuholníky s odvesnami dĺžky n.

a) Vyjadrite počet mrežových bodov obsiahnutých v ľubovoľnom z týchto hranolov.

b) Dokážte, že tento počet je nepárny práve vtedy, keď je n násobok 4.

Riešenie

Keďže hranoly sú súmerné podľa stredu kocky a podľa nej je súmerná i množina všetkých mrežových bodov v kocke, v oboch hranoloch je ich počet rovnaký. Označme ho x.

a) Celkový počet mrežových bodov v kocke je $(n+1)^3$. Tento počet je dvojnásobok počtu mrežových bodov v hranoloch, zmenšený o počet ich spoločných mrežových bodov. Sú to práve tie, ktorých priemety ležia na spoločnej hrane ich podstáv, čo je uhlopriečka štvorca. Týchto bodov je $n+1$ a každý z nich je priemet $n+1$ mrežových bodov. Platí teda

$$2x-(n+1)^2=(n+1)^3,$$

$$2x=(n+1)^3+(n+1)^2=(n+1)^2\left((n+1)+1\right)=(n+1)^2(n+2),$$

$$x=\frac{1}{2}(n+1)^2(n+2).$$

b) Rozoberme prípady:

- Nech $n=4k$, kde k je nenulové prirodzené číslo.
  Potom
  $$x=\frac{1}{2}(4k+1)^2(4k+2)=(4k+1)^2(2k+1),$$
  čo je nepárne číslo.
- Nech $n=4k+1$, kde k je prirodzené číslo.
  Potom
  $$x=\frac{1}{2}\left((4k+1)+1\right)^2\left((4k+1)+2\right)=\frac{1}{2}(4k+2)^2(4k+3)$$
  $$=\frac{1}{2}\left(2(2k+1)\right)^2(4k+3)=\frac{1}{2}\cdot 4(2k+1)^2(4k+3)=2(2k+1)^2(4k+3),$$
  čo je párne číslo.
- Nech $n=4k+2$, kde k je prirodzené číslo.
  Potom
  $$x=\frac{1}{2}\left((4k+2)+1\right)^2\left((4k+2)+2\right)=\frac{1}{2}(4k+3)^2(4k+4)$$
  $$=\frac{1}{2}(4k+3)^2\cdot 4(k+1)=2(4k+3)^2(k+1),$$
  čo je párne číslo.
- Nech $n=4k+3$, kde k je prirodzené číslo.
  Potom
  $$x=\frac{1}{2}\left((4k+3)+1\right)^2\left((4k+3)+2\right)=\frac{1}{2}(4k+4)^2(4k+5)$$
  $$=\frac{1}{2}\left(4(k+1)\right)^2(4k+5)=\frac{1}{2}\cdot 16(k+1)^2(4k+5)=8(k+1)^2(4k+5),$$
  čo je párne číslo.

Skúmaný počet je teda nepárny práve vtedy, keď je n násobok 4.