26. ročník MO, úloha A-III-4

Nájdite všetky reálne riešenia sústavy rovníc

$$x+y+z=3,$$
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{12},$$
$$x^3+y^3+z^3=45$$

s neznámymi x, y, z.

Riešenie

Nech (x, y, z) je vyhovujúca trojica. Potom $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$. Platí

$$xy+yz+zx=\frac{xy+yz+zx}{xyz}\cdot xyz=\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot xyz=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\cdot xyz=\frac{5}{12}xyz,$$

takže

$$27=3^3=(x+y+z)^3=\left(x^3+y^3+z^3\right)+\left(\left(3x^2y+3xy^2\right)+\left(3y^2z+3yz^2\right)+\left(3z^2x+3zx^2\right)\right)+6xyz$$
$$=\left(x^3+y^3+z^3\right)+\left(\left(3x^2y+3xy^2+3xyz\right)+\left(3xyz+3y^2z+3yz^2\right)+\left(3z^2x+3xyz+3zx^2\right)\right)-3xyz$$
$$=\left(x^3+y^3+z^3\right)+(+3xy(x+y+z)+3yz(x+y+z)+3zx(x+y+z))-3xyz$$
$$=\left(x^3+y^3+z^3\right)+3(xy+yz+zx)(x+y+z)-3xyz$$
$$=45+3\cdot\frac{5}{12}xyz\cdot 3-3xyz=45+\left(\frac{5}{4}-1\right)\cdot 3xyz=45+\frac{1}{4}\cdot 3xyz=45+\frac{3}{4}xyz,$$

z čoho

$$-18=\frac{3}{4}xyz,$$
$$-24=xyz,$$

a potom

$$xy+yz+zx=\frac{5}{12}\cdot(-24)=-10.$$

Čísla x, y, z sú podľa Viètových vzťahov korene kubickej rovnice

$$t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)t-xyz=0,$$

takže

$$t^3-3t^2+(-10)t-(-24)=0,$$
$$t^3-3t^2-10t+24=0,$$
$$\left(t^3-2t^2\right)+\left(-t^2+2t\right)+(-12t+24)=0,$$
$$t^2(t-2)-t(t-2)-12(t-2)=0,$$
$$\left(t^2-t-12\right)(t-2)=0,$$
$$(t+3)(t-4)(t-2)=0,$$
$$(t-(-3))\,(t-4)(t-2)=0,$$
$$t\in\{-3,2,4\},$$

a teda

$$\{x,y,z\}=\{-3,2,4\}.$$

Dosadením do pôvodnej sústavy overíme, že každá trojica vytvorená z čísel -3, 2, 4 je jej riešenie:

- $(-3)+2+4=3$.
- $\frac{1}{-3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{-4+6+1}{12}=\frac{5}{12}$.
- $(-3)^3+2^3+4^3=-27+8+64=45$.

Riešenia sústavy sú teda práve $(2,-3,4)$, $(2,4,-3)$, $(-3,2,4)$, $(-3,4,2)$, $(4,2,-3)$, $(4,-3,2)$.