22. ročník MO, úloha C-I-5

Nech vrcholy pravouhlého trojuholníka ležia vo vrcholoch štvorcovej siete a jeho odvesny sú rovnobežné s jej priamkami. Nech h je počet vrcholov siete ležiacich na jeho obvode a v počet vrcholov siete ležiacich v jeho vnútri. Dokážte, že jeho obsah je $\frac{h}{2} + v - 1$.

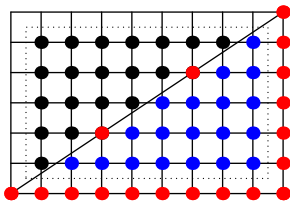
Riešenie

Nech dĺžky odvesien sú a a b. V ich vnútri potom leží $a-1$, resp. $b-1$ vrcholov. Nech d ich najväčší spoločný deliteľ, potom vnútri prepony tohto trojuholníka leží $d-1$ vrcholov siete. Preto

$$h = 3 + (a-1) + (b-1) + (d-1).$$

Obrazy vrcholov siete ležiacich vnútri trojuholníka podľa stredu prepony ležia vnútri s ním súmerného trojuholníka v tejto súmernosti a spolu tvoria všetky vnútorné body obdĺžnika, ktorý je ich zjednotenie, avšak s výnimkou bodov, ktoré ležia vnútri prepony. Platí teda

$$2v = (a-1)(b-1) - (d-1).$$



Potom platí

$$\frac{h}{2} + v - 1 = \frac{1}{2}(h + 2v - 2) = \frac{1}{2}\left((3 + (a-1) + (b-1) + (d-1)) + ((a-1)(b-1) - (d-1)) - 2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(3 + (a-1) + (b-1) + (a-1)(b-1) - 2\right) = \frac{1}{2}\left(a + b + 1 + (ab - a - b + 1) - 2\right) = \frac{1}{2}ab,$$

čo je obsah nášho trojuholníka.

Edičná poznámka

Pôvodné zadanie požadovalo dokázať ekvivalentný vzťah $2S - h - 2v + 2 = 0$, kde S je obsah tohto trojuholníka.