21. ročník MO, úloha A-I-4

Dokážte, že hodnota

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma,$$

kde α, β, γ sú veľkosti uhlov trojuholníka, je najväčšia pre rovnostranný trojuholník.

Riešenie 1

Nech $\delta = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Potom podľa nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = (\sin\alpha + \sin\beta) + \sin(180^\circ - \gamma) = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin(\alpha+\beta)$$

$$= 2\sin\delta\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin 2\delta \le 2\sin\delta\cdot 1 + 2\sin\delta\cos\delta = 2\sin\delta(1+\cos\delta)$$

$$= 2\left(2\sin\frac{\delta}{2}\cos\frac{\delta}{2}\right)\left(\left(\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^2\right) + \left(\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^2\right)\right) = 4\sin\frac{\delta}{2}\cos\frac{\delta}{2}\cdot 2\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2$$

$$= 8\sin\frac{\delta}{2}\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^3 = 8\cdot\sqrt{\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^2\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^6} = 8\cdot\sqrt{3^3\cdot\left(1-\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2\right)\cdot\frac{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2}{3}\cdot\frac{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2}{3}\cdot\frac{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2}{3}}$$

$$= 8\cdot 3\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{\left(1-\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2\right)\cdot\frac{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2}{3}\cdot\frac{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2}{3}\cdot\frac{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2}{3}}^2$$

$$= 8\cdot 3\sqrt{3}\cdot\left(\frac{\left(1-\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2\right) + \frac{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2}{3} + \frac{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2}{3} + \frac{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2}{3}}{4}\right)^2 = 8\cdot 3\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 8\cdot 3\sqrt{3}\cdot\frac{1}{16} = \frac{3}{2}\sqrt{3},$$

pričom rovnosť sa nadobúda práve v prípade, keď sa nadobúda v oboch čiastkových nerovnostiach. Prvá sa nadobúda práve v prípade

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 1,$$

ekvivalentne

$$\frac{\alpha-\beta}{2} = 0,$$

$$\alpha-\beta = 0,$$

$$\alpha = \beta,$$

a vtedy

$$\delta = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\alpha+\alpha}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha = \beta.$$

Druhá sa nadobúda práve v prípade

$$1-\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2 = \frac{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2}{3} = \frac{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2}{3} = \frac{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2}{3},$$

t. j. ekvivalentne

$$1-\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2 = \frac{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2}{3},$$

$$3-3\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2 = \left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2,$$

$$3 = 4\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^2,$$

$$\sqrt{3} = 2\cos\frac{\delta}{2},$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\delta}{2},$$
$$30^\circ = \frac{\delta}{2},$$
$$60^\circ = \delta.$$

Celkovo sa teda maximum nadobúda práve v prípade $\alpha = \beta = \delta = 60^\circ$, t. j. pri rovnostrannom trojuholníku.

Riešenie 2

Keďže $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ a funkcia sin je na tomto intervale konkávna, podľa Jensenovej nerovnosti platí

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 3 \cdot \frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3} \leq 3 \cdot \sin\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = 3 \cdot \sin\frac{180^\circ}{3},$$

pričom rovnosť sa nadobúda práve v prípade $\alpha = \beta = \gamma$, t. j. keď je trojuholník rovnostranný.

Edičná poznámka

Pôvodné zadanie malo dve časti. V prvej žiadali dokázať, že maximum sa nenadobúda pre nerovnoramenné trojuholníky, v druhej, že spomedzi rovnoramenných trojuholníkov sa maximum nadobudne v prípade rovnostraných. Vzhľadom na celkový výsledok je takéto zadanie rovnocenné nami upravenému.