17. ročník MO, úloha B-I-2

Nech α, β, γ sú veľkosti všetkých uhlov trojuholníka. Dokážte, že

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \leq \frac{1}{8},$$

a zistite, kedy nastáva rovnosť.

Riešenie 1

Bez ujmy na všeobecnosti $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Keďže $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, platí $\beta, \gamma < 90°$. Pretože funkcia cos je na množine $(0°, 180°)$ klesajúca a $\alpha - \beta \geq 0°$, podľa nerovnosti medzi kladnými číslami $\cos\gamma$ a $1 - \cos\gamma$ platí

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta) \cdot \cos\gamma = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) \cdot \cos\gamma$$

$$\leq \frac{1}{2} \cdot (\cos 0 + \cos(\alpha + \beta)) \cdot \cos\gamma = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(180° - \gamma)) \cdot \cos\gamma = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos\gamma) \cdot \cos\gamma$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{(1 - \cos\gamma) \cdot \cos\gamma}\right)^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(1 - \cos\gamma) + \cos\gamma}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

Ak nastáva rovnosť, tak $1 - \cos\gamma = \cos\gamma$, t. j. $1 = \cos\gamma$, t. j. $\frac{1}{2} = \cos\gamma$, t. j. $\gamma = 60°$. Potom

$$120° = 60° + 60° = \gamma + \gamma \leq \alpha + \beta = 180° - \gamma = 180° - 60° = 120°,$$

takže $\alpha = \beta = 60°$, a teda trojuholník je rovnostranný. V takom prípade naozaj platí

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma = \cos 60° \cdot \cos 60° \cdot \cos 60° = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Riešenie 2

Bez ujmy na všeobecnosti $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Rozoberme prípady:

- Nech tento trojuholník nie je ostrouhlý.

  Potom má práve jeden uhol neostrý a zvyšné dva ostré, takže z čísel $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ je jedno nekladné a ostatné dve kladné. Ich súčin je teda nekladný, takže menší než $\frac{1}{8}$.

- Nech je tento trojuholník ostrouhlý.

  Keďže funkcia cos je na množine $(0°, 90°)$ kladná a konkávna, podľa nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom a podľa Jensenovej nerovnosti platí

  $$\sqrt[3]{\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma} \leq \frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3}$$

  $$= \frac{1}{3}\cos\alpha + \frac{1}{3}\cos\beta + \frac{1}{3}\cos\gamma \leq \cos\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right) = \cos\frac{180°}{3} = \cos 60° = \frac{1}{2},$$

  z čoho

  $$\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \leq \frac{1}{8}.$$

  Rovnosť sa v prípade prvej nerovnosti nadobúda v prípade $\alpha = \beta = \gamma$, t. j. keď je trojuholník rovnostranný. V takom prípade naozaj platí

  $$\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma = \cos 60° \cdot \cos 60° \cdot \cos 60° = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Edičná poznámka

Pôvodné (prvé) riešenie osobitne riešilo prípad neostrouhlého trojuholníka, je to však zbytočné.

Druhé riešenie je pridané.