

---

# DERBY

---

## 3. kolo, 2023/2024

10.6.2024

---

- 1 Nech  $ABCD$  je konvexný štvoruholník taký, že obe spojnice stredov jeho protilahlých strán majú rovnakú dĺžku. Dokážte, že uhlopriečky  $AC$  a  $BD$  sú navzájom kolmé a že platí

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |DA|^2.$$

- 2 Dokážte, že pre každé prirodzené číslo  $n$  je číslo  $2024^{3^n} + 1$  deliteľné číslom  $3^{n+2}$ .  
3 Dokážte, že pre každú trojicu  $(x, y, z)$  kladných čísel platí nerovnosť

$$\sqrt{xyz} \left( \frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} \right) \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z},$$

a zistite, kedy nastane rovnosť.

- 4 V jednom rade je postavených  $n$  stĺpcov rovnakých mincí tak, že medzi každými dvoma stĺpcami rovnakej výšky sa nachádza stĺpec vyšší od nich. Nech najvyšší stĺpec obsahuje  $k$  mincí. Vyjadrite pomocou  $k$  najväčšiu možnú hodnotu  $n$ .
- 

Na riešenie úloh máte čas 4 hodiny. Riešenie každej úlohy musí byť na osobitnom papieri.

Výsledky, riešenia a ďalšie informácie o súťaži budú na stránke <http://umv.science.upjs.sk/mo/>.

---