DERBY

3. kolo, 2023/2024

10. 6. 2024

1 **Zdroj:** MO, 47. ročník, B-S-2

Zadanie:

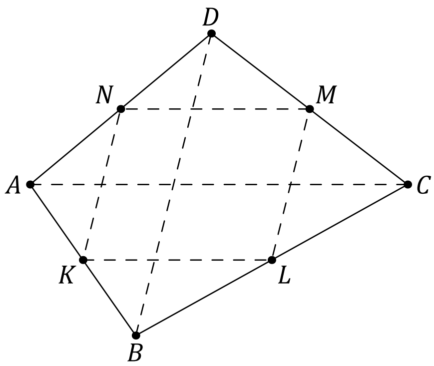
Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník taký, že obe spojnice stredov jeho protiľahlých strán majú rovnakú dĺžku. Dokážte, že uhlopriečky AC a BD sú navzájom kolmé a že platí

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |DA|^2 .$$

Riešenie:

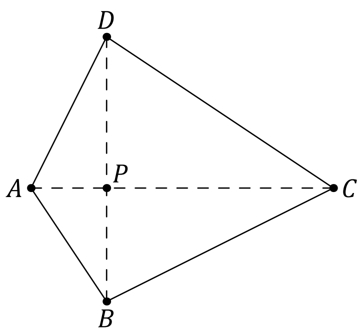
Dokážeme pomocné tvrdenie:

- Nech $ABCD$ je ľubovoľný konvexný štvoruholník. Nech K, L, M, N sú postupne stredy jeho strán AB, BC, CD, DA. Potom $KLMN$ je rovnobežník, ktorého strany sú rovnobežné s uhlopriečkami $ABCD$.
  - Keďže úsečky KL a MN sú stredné priečky trojuholníkov ABC, resp. ADC, sú rovnako dlhé a rovnobežné s AC i navzájom. Analogicky sú rovnako dlhé a rovnobežné s BD i navzájom aj úsečky KN a LM, takže $KLMN$ je rovnobežník.



Podľa pomocného tvrdenia je $KLMN$ rovnobežník, a keďže $|KM| = |LN|$, $KLMN$ je obdĺžnik. Jeho strany sú teda kolmé, takže podľa pomocného tvrdenia sú kolmé aj uhlopriečky AC a BD.

Nech P je ich priesečník.



Potom podľa Pytagorovej vety platí

$$|AB|^2 + |CD|^2 = \left(|PA|^2 + |PB|^2\right) + \left(|PC|^2 + |PD|^2\right) = \left(|PB|^2 + |PC|^2\right) + \left(|PD|^2 + |PA|^2\right) = |BC|^2 + |DA|^2 .$$

2 **Zdroj:** MO, 47. ročník, A-II-1, úprava

Zadanie:

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n je číslo $2024^{3^n} + 1$ deliteľné číslom 3^{n+2}.

Riešenie:

Tvrdenie dokážeme indukciou podľa n.

1 Platí
$$2024^{3^0} + 1 = 2024^1 + 1 = 2024 + 1 = 2025 = 9 \cdot 225 = 3^2 \cdot 225 = 3^{0+2} \cdot 225,$$
takže $2024^{3^0} + 1$ je deliteľné 3^{0+2}.

2 Nech n je prirodzené číslo také, že $2024^{3^n} + 1$ deliteľné 3^{n+2}, existuje teda prirodzené číslo k také, že $2024^{3^n} + 1 = 3^{n+2}k$. Potom platí
$$\begin{aligned} 2024^{3^{n+1}} + 1 &= 2024^{3\cdot 3^n} + 1 = \left(2024^{3^n}\right)^3 + 1 = \left(3^{n+2}k - 1\right)^3 + 1 \\ &= \left(\left(3^{n+2}k\right)^3 - 3\left(3^{n+2}k\right)^2 + 3\left(3^{n+2}k\right) - 1\right) + 1 = \left(3^{n+2}k\right)^3 - 3\left(3^{n+2}k\right)^2 + 3\left(3^{n+2}k\right) \\ &= \left(3^{n+2}k\right)\left(\left(3^{n+2}k\right)^2 - 3\left(3^{n+2}k\right) + 3\right) = 3^{n+2}k\left(3^{2n+4}k^2 - 3\left(3^{n+2}k\right) + 3\right) \\ &= 3^{n+2}k \cdot 3\left(3^{2n+3}k^2 - 3^{n+2}k + 1\right) = 3^{(n+1)+2}\left(k\left(3^{2n+3}k^2 - 3^{n+2}k + 1\right)\right), \end{aligned}$$
takže $2024^{3^{n+1}} + 1$ je deliteľné $3^{(n+1)+2}$.

---

3 **Zdroj:** MO, 47. ročník, B-I-3

Zadanie:

Dokážte, že pre každú trojicu (x, y, z) kladných čísel platí nerovnosť
$$\sqrt{xyz}\left(\frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x}\right) \le \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z},$$
a zistite, kedy nastane rovnosť.

Riešenie:

Podľa nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom platí
$$\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2},$$
$$\sqrt{yz} \le \frac{y+z}{2},$$
$$\sqrt{zx} \le \frac{z+x}{2},$$
t. j.
$$\frac{2}{x+y} \le \frac{1}{\sqrt{xy}},$$
$$\frac{2}{y+z} \le \frac{1}{\sqrt{yz}},$$
$$\frac{2}{z+x} \le \frac{1}{\sqrt{zx}},$$
pričom rovnosti sa postupne nadobúdajú práve v prípadoch $x = y$, $y = z$, $z = x$. Po sčítaní
$$\frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} \le \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}},$$
z čoho
$$\sqrt{xyz}\left(\frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x}\right) \le \frac{\sqrt{xyz}}{\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{xyz}}{\sqrt{yz}} + \frac{\sqrt{xyz}}{\sqrt{zx}} = \sqrt{z} + \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z},$$
pričom rovnosť sa nadobúda práve vtedy, keď sa nadobúda vo všetkých troch čiastkových nerovnostiach, t. j. keď $x = y = z$.

---

4 **Zdroj:** MO, 47. ročník, A-II-2

Zadanie:

V jednom rade je postavených n stĺpcov rovnakých mincí tak, že medzi každými dvoma stĺpcami rovnakej výšky sa nachádza stĺpec vyšší od nich. Nech najvyšší stĺpec obsahuje k mincí. Vyjadrite pomocou k najväčšiu možnú hodnotu n.

Riešenie 1:

Pre každé kladné prirodzené číslo m označme p_m počet stĺpcov s m mincami. V každej z $p_m - 1$ medzier medzi nimi potom existuje aspoň jeden stĺpec s viac mincami, takže $p_m - 1 \leq \sum_{i=m+1}^{k} p_i$.

Ukážeme spätnou indukciou, že pre každé j z $\{1, \dots, k\}$ platí $p_j \leq 2^{k-j}$:

1 Platí

$$p_k = 1 + (p_k - 1) \leq 1 + \sum_{i=k+1}^{k} p_i = 1 + 0 = 1 = 2^0 = 2^{k-k}.$$

2 Nech $j \in \{1, \dots, k-1\}$, pričom pre každé i väčšie než j platí $p_i \leq 2^{k-i}$.

Potom platí

$$p_j = 1 + (p_j - 1) \leq 1 + \sum_{i=j+1}^{k} p_i \leq 1 + \sum_{i=j+1}^{k} 2^{k-i}$$

$$= 1 + \frac{2^{k-(j+1)+1} - 2^{k-k}}{2-1} = 1 + \frac{2^{k-j} - 2^0}{1} = 1 + \left(2^{k-j} - 1\right) = 2^{k-j}.$$

Potom platí

$$n = \sum_{j=1}^{k} p_j \leq \sum_{j=1}^{k} 2^{k-j} = \frac{2^{k-1+1} - 2^{k-k}}{2-1} = \frac{2^k - 2^0}{1} = 2^k - 1.$$

Ukážeme že táto hodnota sa nadobúda: Pre každé kladné číslo k definujme postupnosť s_k kladných prirodzených čísel takto:

1 $s_1 = (1)$.

2 Ak k je kladné prirodzené číslo, tak $s_{k+1} = s_k \,||(k+1)\,||\, s_k$.

Dokážeme indukciou, že pre každé kladné číslo k má s_k dĺžku $2^k - 1$, jej najväčší člen je k a medzi každými jej dvoma rovnakými členmi existuje od nich väčší:

1 s_1 čiže (1) má dĺžku 1 čiže $2^1 - 1$, jej najväčší člen je 1 a podmienka, že medzi každými jej dvoma rovnakými členmi existuje od nich väčší, je splnená triviálne.

2 Nech k je kladné prirodzené číslo, s_k má dĺžku $2^k - 1$, jej najväčší člen je k a medzi každými jej dvoma rovnakými členmi existuje od nich väčší:

Potom s_{k+1} čiže $s_k \,||(k+1)\,||\, s_k$ má dĺžku $\left(2^k - 1\right) + 1 + \left(2^k - 1\right)$ čiže $2^{k+1} - 1$ a jej najväčší člen je $k+1$, lebo najväčší člen s_k je k. Člen $k+1$ je teda jediný.

Ak sú dva rovnaké členy v jednej z častí s_k, potom podľa indukčného predpokladu medzi nimi existuje väčší člen. Ak sú dva rovnaké členy v rôznych častiach s_k, člen $k+1$ je medzi nimi a je od oboch väčší.

Pre každé j z $\left\{1, \dots, 2^k - 1\right\}$ teda stačí do j. stĺpca dať $s_k(j)$ mincí.

Riešenie 2:

Pre každé kladné prirodzené číslo k označme najväčšiu hľadanú hodnotu n_k. Indukciou dokážeme, že táto hodnota existuje, platí $n_{k+1} = 2n_k + 1$ a $n_1 < \cdots < n_k$.

1 Zrejme $n_1 = 1$ a stĺpec obsahuje 1 mincu.

2 Nech čísla n_1, ..., n_k existujú a spĺňajú predpokladané rovnosti.

Majme ľubovoľný takýto rad. Stĺpec s výškou k je v ňom jediný, takže rozdeľuje rad na dve časti, ktoré tiež majú skúmanú vlastnosť a všetky stĺpce v nich obsahujú najviac k mincí. Podľa indukčného predpokladu je v oboch častiach najviac n_k stĺpcov Preto číslo n_{k+1} existuje a platí $n_{k+1} \leq n_k + n_k + 1 = 2n_k + 1$.

Ak vezmeme dva rovnaké rady so skúmanou vlastnosťou, práve s n_k stĺpcami, z ktorých najvyšší obsahuje k mincí, a postavíme medzi ne stĺpec s $k+1$ mincami, dostaneme vyhovujúci rad, v ktorom má najvyšší stĺpec $k+1$ mincí. Preto $n_{k+1} \geq n_k + n_k + 1 = 2n_k + 1$.

Z toho $n_{k+1} = 2n_k + 1$, a teda aj $n_1 < \cdots < n_k < n_{k+1}$.

Indukciou pre každé kladné prirodzené číslo k ukážeme, že $n_k = 2^k - 1$:

1 Platí
$$n_1 = 1 = 2 - 1 = 2^1 - 1.$$

2 Nech $n_k = 2^k - 1$.
Potom
$$n_{k+1} = 2n_k + 1 = 2\left(2^k - 1\right) + 1 = 2^{k+1} - 1.$$
