Kryptografické systémy a ich aplikácie

doc. RNDr. Jozef Jirásek, PhD.
jozef.jirasek@upjs.sk

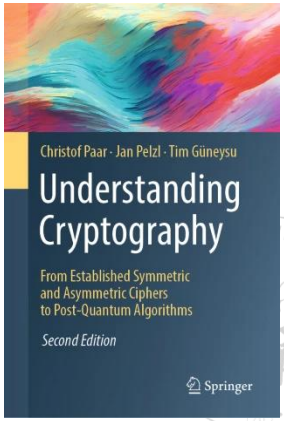
ZS 2026

Témy prednášok

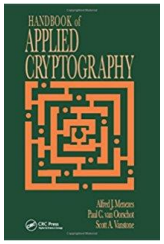
- úvod do kryptografie
- klasická kryptografia
- symetrická kryptografia
  - prúdové šifry
  - blokové šifry
- asymetrická kryptografia
- digitálny podpis
- silná autentifikácia
- správa kľúčov ...

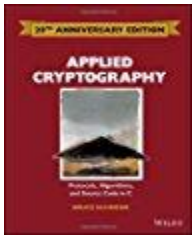
Organizácia semestra

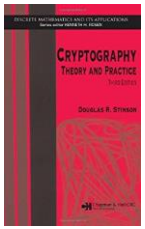
- prednášky v P11 v stredu 14:25 – 16:55
  (vrátane 15 min prestávky)
- úlohy k prednáškam – odovzdať do nasledujúcej prednášky v písomnej forme
- cvičenia v P4 vo štvrtok 11:40 – 13:10
  riešenia zložitejších úloh a implementácia algoritmov z prednášok – práca v prostredí Jupyter Notebook s prípadným dokončením doma
- štúdium z literatúry – odporučená učebnica
  Ch. Paar, J. Pelzl, T. Güneysu: Understanding Cryptography, Springer-Verlag, 2024,
  ISBN 978-3-662-69006-2 (prístupná v Intranete)

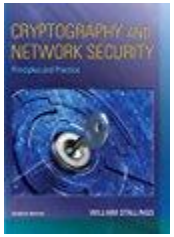


Ďalšia odporúčaná literatúra









- A. Menezes, P. van Oorschot, S. Vanstone: Handbook of Applied Cryptography, CRC Press, 2001 (free!)
- B. Schneier: Applied Cryptography. Protocols, Algorithms and Source Code in C, 2.ed., John Wiley & Sons, 1996 (v študovni)
- D. R. Stinson: Cryptography. Theory and Practie, 2.ed., CRC Press, 2002 (v študovni)
- W. Stallings: Cryptography and Network Security. Principles and Practice, 7.ed., Prentice-Hall, 2016

Hodnotenie

- 40 b – domáce zadania z prednášok
- 30 b – aktívna práca na cvičeniach
- 20 b – polsemestrálny test (1 termín)
- 50 b – záverečný písomný test (3 termíny)

E – minimálne 70 b,
D – minimálne 80 b,
C – minimálne 90 b,
B – minimálne 100 b,
A – minimálne 110 b

Kryptológia

- grécky kryptós (κρυπτός) = ukrytý
  -logia (-λογία) = štúdium kryptológia
  graphein (γράφειν) = písanie kryptografia
  veda o utajovaní správ (komunikácie)
- **kryptológia** = kryptografia + kryptoanalýza
- **kryptografia** – štúdium algoritmov (protokolov) pre bezpečnú komunikáciu
- **kryptoanalýza** – vyhľadávanie bezpečnostných slabín v algoritmoch (protokoloch) a možností ich využitia pri získavaní utajených informácií

Využitie kryptografie

- utajenie prenosu informácie (dôvernosť komunikácie)

Využitie kryptografie

- utajenie prenosu informácie (dôvernosť komunikácie)
- zabezpečenie proti zmenám pri prenose (integrita správ)
- zabezpečenie proti výmene a podhodeniu nepravých správ (pôvodnosť správ)
- zabezpečenie proti maskovaniu sa odosielateľa za iného (nepopierateľnosť pôvodcu správy)
- obmedzenie zahltenia informačného zdroja (dostupnosť správ)
- iné nástroje na dosiahnutie komunikačnej bezpečnosti ...

Utajenie kódovaním

- **kódovanie** – kto pozná kód (algoritmus kódovania), ten vie správu prečítať

KRYPTOGRAFIA NA UPJS JE SUPER!

- 4b525950544f47524146494120e412055504a532 04a4520535504552 21 - ASCII kódovanie
- UPJS的密碼學是偉大的！
- !التشفير على أوبس هو عظيم
- クリプトグラフィア・ナー・アップジズ・ジー・スーパー

Paleografia

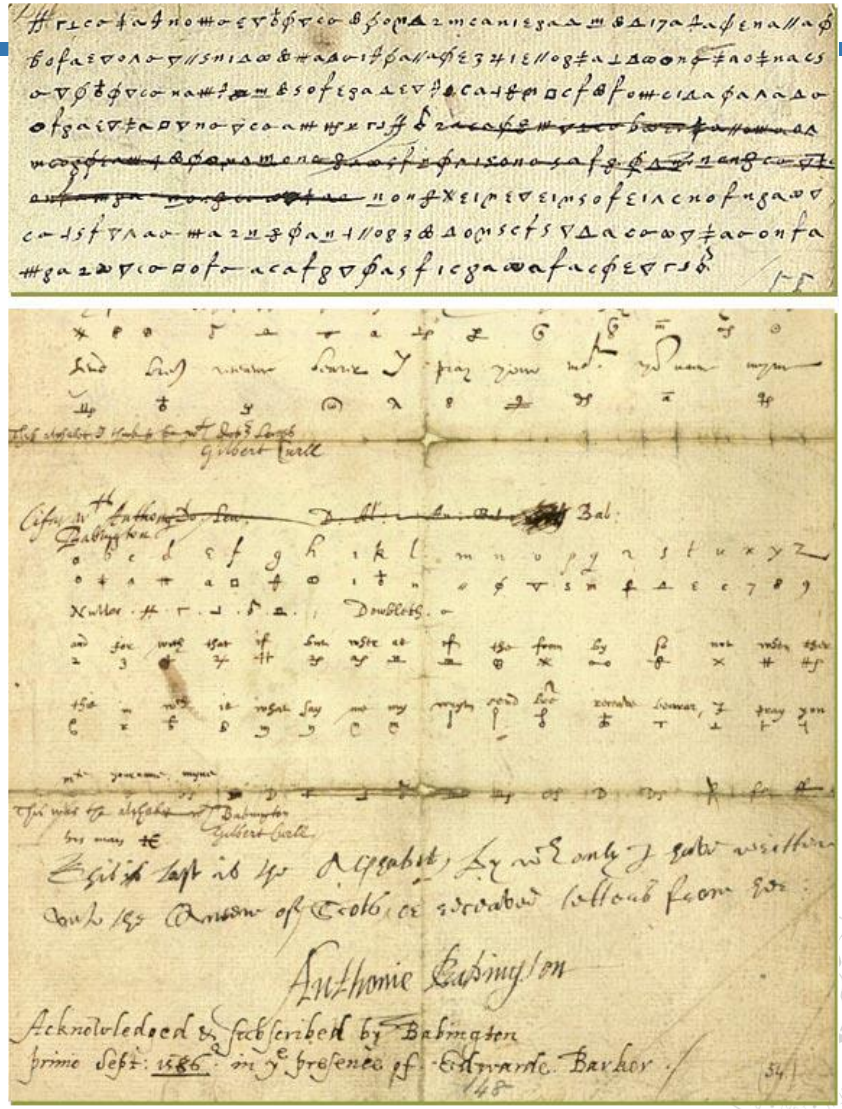
- Faistský disk z Kréty (17. storočie BC) – neznáme písmo ani význam (astronomický dokument, kalendárny záznam, hracia doska ?)

- nerozlúštené harappské písmo (26. až 20. storočie BC)

- zatiaľ nerozlúštené písmo Rongorongo z Veľkonočného ostrova

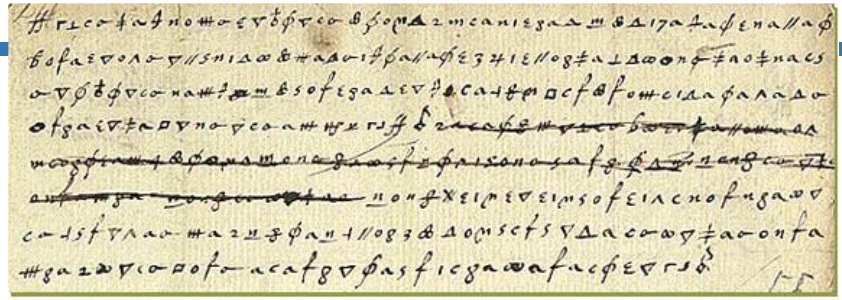
Kódové knihy

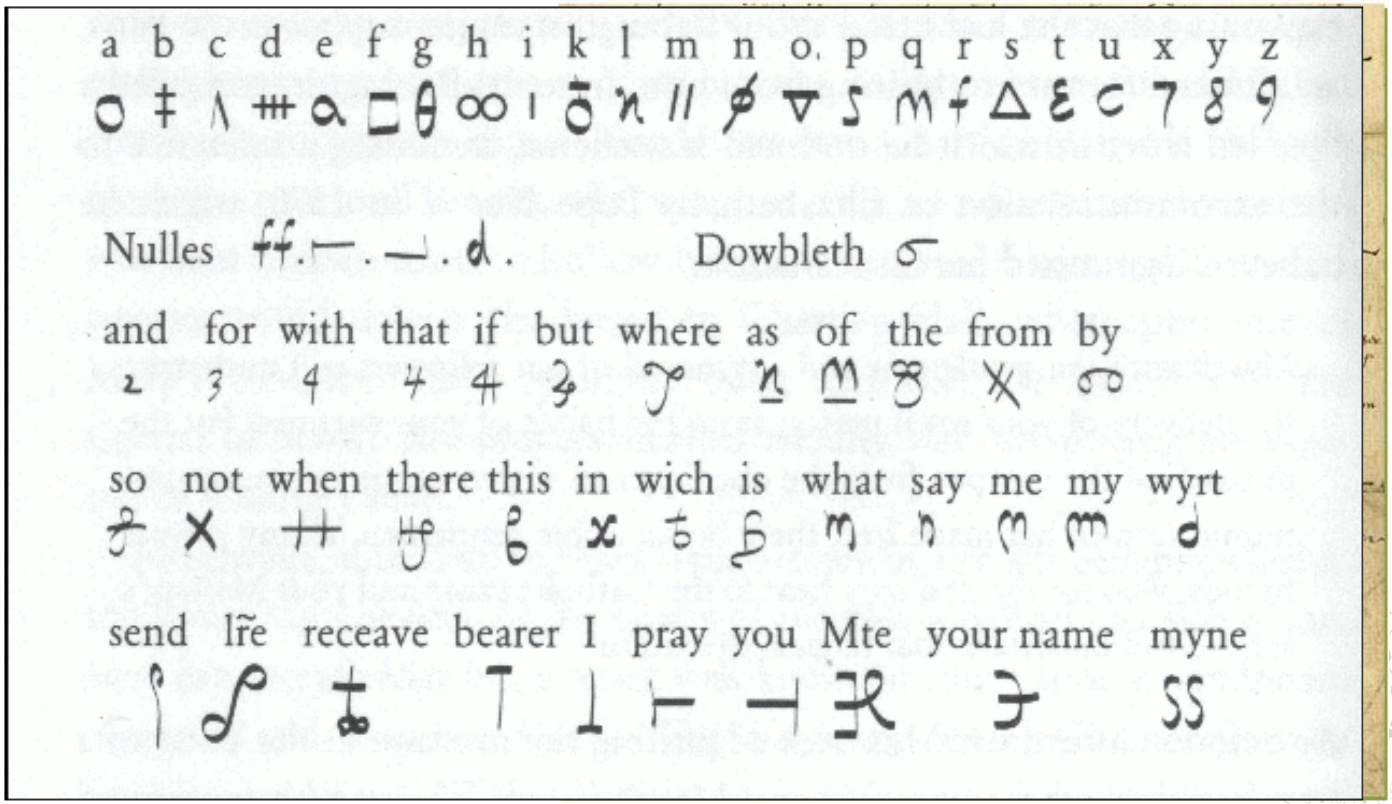
- Mária Stuartová – správy šifrované kódom (nomenklátorom) ju stáli život



Kódové knihy

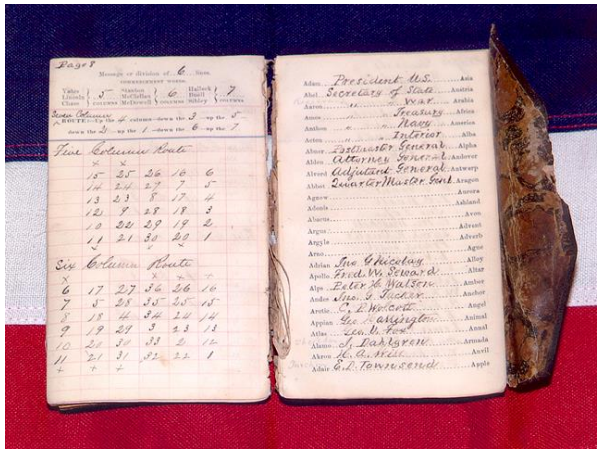
- nomenklátor



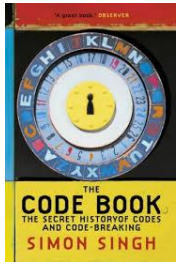


Kódovanie

- kódové knihy v 1. sv. vojne
- jazyk Navajo v 2. sv. vojne



Simon Singh: Kniha kódů a šifer (The Code Book)



Steganografia

ukrývanie správy v texte (inej správe)

- MKJEDKKJFMERMFJEDYJEPSEPJFKSTTJFKSTOFWSAS GMLKOPRJEDTSAMLKPOFYTDHFIJEQWIAMLDKENM LPQOADRTYLUDLPORPAQWLMJMLDKTSLKDPTJLKD PTELKDTSSDPEOTULDKTAPDRLGHETRSALRSELTM

Steganografia

- MKJEDKKJFMERMFJEDYJEPSEPJFKSTTJFKSTOFWSAS GMLKOPRJEDTSAMLKPOFYTDHFIJEQWIAMLDKENM LPQOADRTYLUDLPORPAQWLMJMLDKTSLKDPTJLKD PTELKDTSSDPEOTULDKTAPDRLGHETRSALRSELTM

- MKJED K KJFME R MFJED Y JEPSE P JFKST T JFKST O FWSAS G MLKOP R JEDTS A MLKPO F YTDHF I JEQWI A MLDKE N MLPQO A DRTYL U DLPOR P AQWLM J MLDKT S LKDPT J LKDPT E LKDTS S DPEOT U LDKTA P DRLGH E TRSAL R SELTM

Steganografia

- obrázok vľavo obsahuje pribalený text v ASCII kóde

Steganografia

- obrázok vľavo obsahuje pribalený text v ASCII kóde

Offset(h)	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	
000BE950	63	FD	51	59	0F	C3	43	42	3D	7F	C9	D2	C1	F1	02	72	cýQY.ÃCB=.ÉÒÁñ.r
000BE960	3F	E2	BA	C8	1E	44	A7	09	0A	C4	26	8E	AD	3C	AD	A1	?âºÈ.D§..Ä&Ž.<.¡
000BE970	E2	65	B3	92	AB	2A	A9	07	59	88	01	F5	F6	9B	C3	1F	âe³'«*©.Yˆ.õö›Ã.
000BE980	4E	FA	7E	20	2A	47	EC	FF	00	37	EC	EA	A3	E2	27	CA	Nú~ *Gìÿ.7ìê£â'Ê
000BE990	BD	48	8E	B2	57	9F	C9	21	A7	49	9E	F2	78	58	3B	14	½HŽ²WŸÉ!§IžòxX;.
000BE9A0	82	76	09	0A	3B	5C	21	2A	16	E7	FD	7F	77	15	D2	A6	‚v..;\!*.çý.w.Ò¦
000BE9B0	B5	AA	83	FB	7F	CD	D7	8F	52	69	6A	64	45	8E	9D	A9	µªƒû.Í×.RijdEŽ.©
000BE9C0	A2	58	E3	6A	85	8E	CF	19	67	99	E5	92	36	69	98	95	¢Xãj…ŽÏ.g™å'6i˜•
000BE9D0	22	27	5F	A2	8E	7D	DD	55	E4	ED	6F	80	75	47	93	49	"'_¢Ž}ÝUäío€uG"I
000BE9E0	55	A1	24	9F	F5	7C	FA	EE	17	8A	3A	69	E9	21	65	8A	U¡$Ÿõ|úî.Š:ié!eŠ
000BE9F0	6A	7A	A8	D1	E0	8E	55	48	82	BB	4B	0B	2C	65	97	53	jz¨ÑàŽUH‚»K.,e—S
000BEA00	69	69	3E	80	9F	A5	BD	DA	60	3C	1F	09	32	69	D3	1E	ii>€Ÿ¥½Ú`<..2iÓ.
000BEA10	11	92	63	10	39	AF	13	FB	7F	D5	FE	6E	BF	FF	D9	4B	.'c.9¯.û.Õþn¿ÿÙK
000BEA20	52	59	50	54	4F	47	52	41	46	49	41	20	4E	41	20	55	RYPTOGRAFIA NA U
000BEA30	50	4A	53	20	4A	45	20	53	55	50	45	52					PJS JE SUPER

Offset(h)	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	
000BE950	63	FD	51	59	0F	C3	43	42	3D	7F	C9	D2	C1	F1	02	72	cýQY.ÃCB=.ÉÒÁñ.r
000BE960	3F	E2	BA	C8	1E	44	A7	09	0A	C4	26	8E	AD	3C	AD	A1	?âºÈ.D§..Ä&Ž.<.¡
000BE970	E2	65	B3	92	AB	2A	A9	07	59	88	01	F5	F6	9B	C3	1F	âe³'«*©.Yˆ.õö›Ã.
000BE980	4E	FA	7E	20	2A	47	EC	FF	00	37	EC	EA	A3	E2	27	CA	Nú~ *Gìÿ.7ìê£â'Ê
000BE990	BD	48	8E	B2	57	9F	C9	21	A7	49	9E	F2	78	58	3B	14	½HŽ²WŸÉ!§IžòxX;.
000BE9A0	82	76	09	0A	3B	5C	21	2A	16	E7	FD	7F	77	15	D2	A6	‚v..;\!*.çý.w.Ò¦
000BE9B0	B5	AA	83	FB	7F	CD	D7	8F	52	69	6A	64	45	8E	9D	A9	µªƒû.Í×.RijdEŽ.©
000BE9C0	A2	58	E3	6A	85	8E	CF	19	67	99	E5	92	36	69	98	95	¢Xãj…ŽÏ.g™å'6i˜•
000BE9D0	22	27	5F	A2	8E	7D	DD	55	E4	ED	6F	80	75	47	93	49	"'_¢Ž}ÝUäío€uG"I
000BE9E0	55	A1	24	9F	F5	7C	FA	EE	17	8A	3A	69	E9	21	65	8A	U¡$Ÿõ|úî.Š:ié!eŠ
000BE9F0	6A	7A	A8	D1	E0	8E	55	48	82	BB	4B	0B	2C	65	97	53	jz¨ÑàŽUH‚»K.,e—S
000BEA00	69	69	3E	80	9F	A5	BD	DA	60	3C	1F	09	32	69	D3	1E	ii>€Ÿ¥½Ú`<..2iÓ.
000BEA10	11	92	63	10	39	AF	13	FB	7F	D5	FE	6E	BF	FF	D9		.'c.9¯.û.Õþn¿ÿÙ

Utajený text ?

H	O	V	M	Q	L	D	O	X	C	F	X		K	X		R	M	G	P		G	B		P	R	M	B	O	!

Utajený text ?

možné významy znakov

H	O	V	M	Q	L	D	O	X	C	F	X		K	X		R	M	G	P		G	B		P	R	M	B	O	!
								A			A			A															!

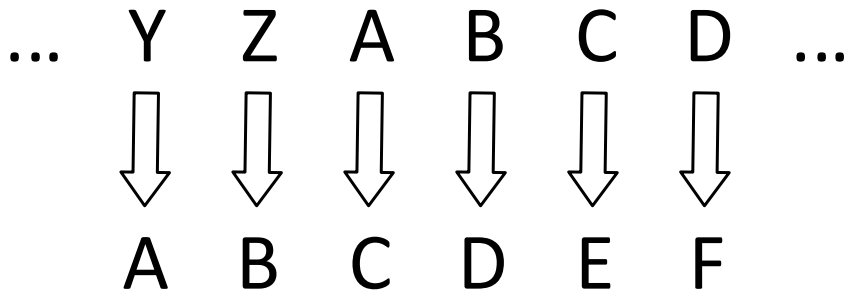
Caesarova šifra

posunutie v abecede o 3 znaky

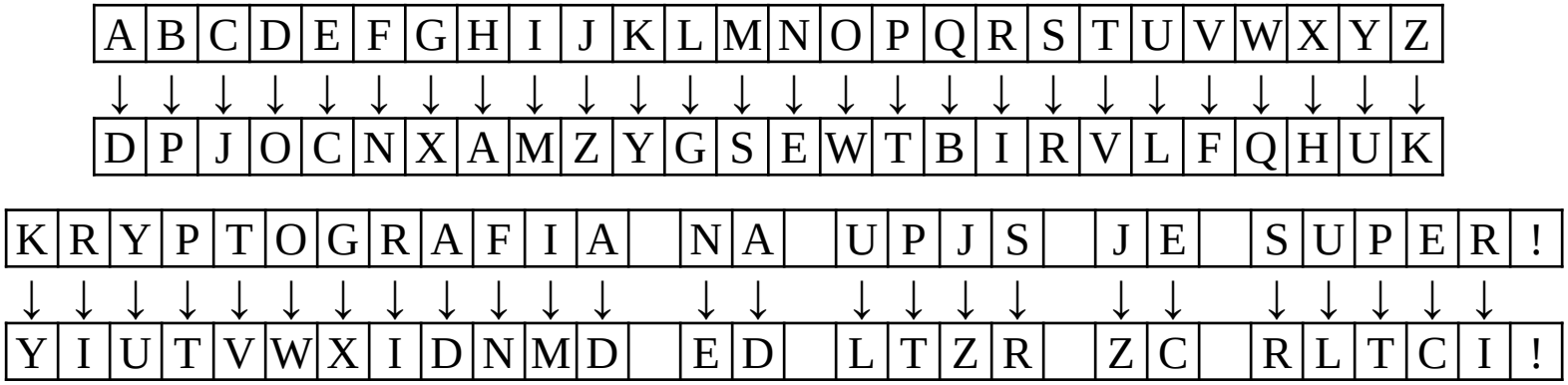
H	O	V	M	Q	L	D	O	X	C	F	X		K	X		R	M	G	P		G	B		P	R	M	B	O	!
I	P	W	N	R	M	E	P	Y	D	G	Y		L	Y		S	N	H	Q		H	C		Q	S	N	C	P	!
J	Q	X	O	S	N	F	Q	Z	E	H	Z		M	Z		T	O	I	R		I	D		R	T	O	D	Q	!
K	R	Y	P	T	O	G	R	A	F	I	A		N	A		U	P	J	S		J	E		S	U	P	E	R	!

Posuvná šifra

- abecedný posun o k znakov abecedy
- k je tajomstvo medzi odosielateľom a prijímateľom správy
- 25 možných posunov ...



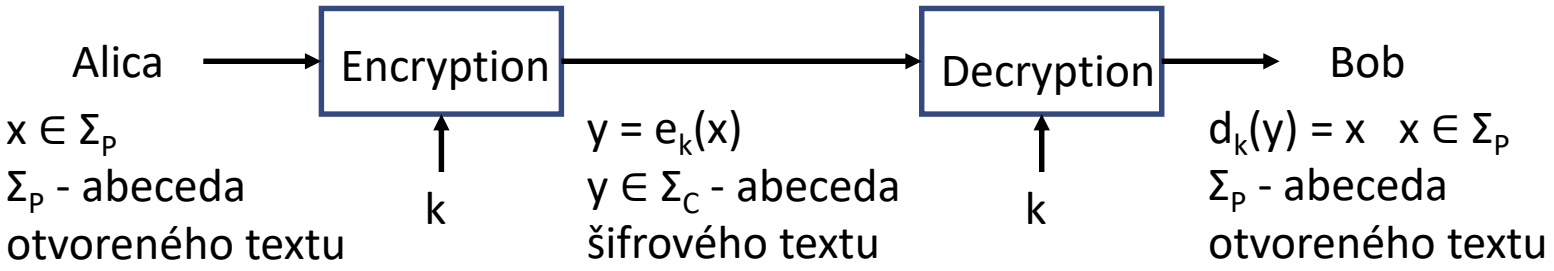
Monoalfabetická substitúcia



- tajomstvom je zvolená **permutácia abecedy**
- permutácií je 26 ! = 403 291 461 126 605 635 584 000 000

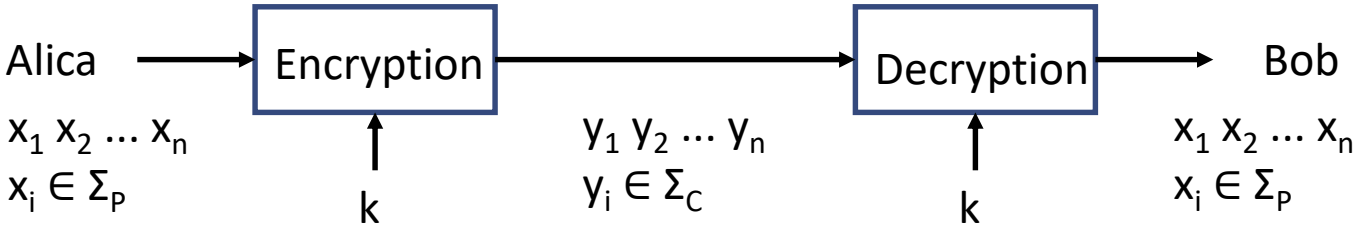
Klasické symetrické šifry

Formálny zápis šifrovania so zdieľaným tajomstvom



- Alica a Bob používajú zápis v abecede otvoreného textu Σ_P (napr. {a, b, ..., z}) a poznajú zdieľané tajomstvo k (secret key)
- šifrovaný text je zaznamenaný v abecede šifrového textu Σ_C (prakticky bývajú obidve abecedy rovnaké – napr. prirodzené čísla)
- šifrovacia funkcia (encryption) $e_k : \Sigma_P \rightarrow \Sigma_C$ priradí znaku z abecedy otvoreného textu znak z abecedy šifrového textu v závislosti od zdieľaného tajomstva k
- dešifrovacia funkcia (decryption) $d_k : \Sigma_C \rightarrow \Sigma_P$ priradí znaku z abecedy šifrového textu v závislosti od tajomstva k spätne znak z abecedy otvoreného textu
- rozšírime prirodzene toto pravidlo na reťazce znakov nad abecedou Σ_P ($\Sigma_P^* = \{ x_1 x_2 \ldots x_n \mid x_i \in \Sigma_P \}$) resp. reťazce znakov nad abecedou Σ_C

Kryptografický systém (symetrický)



Kryptografický systém je pätica (P, C, K, E, D), kde

- P je konečná množina otvorených textov (*plain texts*) nad abecedou Σ_P $\quad P \subseteq \Sigma_P^*$
- C je konečná množina šifrových textov (*cipher texts*) nad abecedou Σ_C $\quad C \subseteq \Sigma_C^*$
- K je konečná množina kľúčov (*keys*)
- pre každé $k \in K$ existuje šifrovacia funkcia $e_k \in E$ a dešifrovacia funkcia $d_k \in D$ také, že pre každý otvorený text $x_1 x_2 \dots x_n \in P$ platí $d_k(e_k(x_i)) = x_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Posuvná šifra – formálny zápis

- textovú abecedu reprezentujme číslami 0, 1, ..., 25 (šifrovacie a dešifrovacie funkcie bude možné jednoduchšie zapísať)
- $\Sigma_P = \Sigma_C = K = \{0, 1, ..., 25\}$
- $\forall\, x \in \Sigma_P \;\; \forall\, k \in K \quad e_k(x) = (x + k) \bmod 26$
- $\forall\, y \in \Sigma_C \;\; \forall\, k \in K \quad d_k(y) = (y - k) \bmod 26$
- výpočty v aditívnej grupe $\mathbb{Z}_{26}$

Kryptoanalýza posuvnej šifry

- poznám množinu P
  (číselne zakódované texty v známom jazyku)
- nepoznám kľúč k

- vyskúšam 26 možností posunu šifrového textu
- postupne vylúčim nezmyselné interpretácie

- bezpečnosť ? ... veľkosť množiny kľúčov |K|
- čo ak nepoznám P ?

Monoalfabetická substitúcia

- $\Sigma_P = \Sigma_C = \{0, 1, \ldots, 25\}$
- $K = \{\pi : \Sigma_P \rightarrow \Sigma_C\}$ permutácie množiny {0, 1, ..., 25}
- $e_\pi(x) = \pi(x)$
- $d_\pi(y) = \pi^{-1}(y)$ π^{-1} je inverzná permutácia k π

$|K| = 26!$

Ako si zapamätať kľúč ?

Monoalfabetická substitúcia

- $\Sigma_P = \Sigma_C = \{0, 1, \ldots, 25\}$
- $K = \{\pi : \Sigma_P \rightarrow \Sigma_C\}$ permutácie množiny {0, 1, ..., 25}
- $e_\pi(x) = \pi(x)$
- $d_\pi(y) = \pi^{-1}(y)$ π^{-1} je inverzná permutácia k π

|K| = 26!

Ako si zapamätať kľúč ?

VELMIUTAJNYKCBDFGHOPQRSWXZ

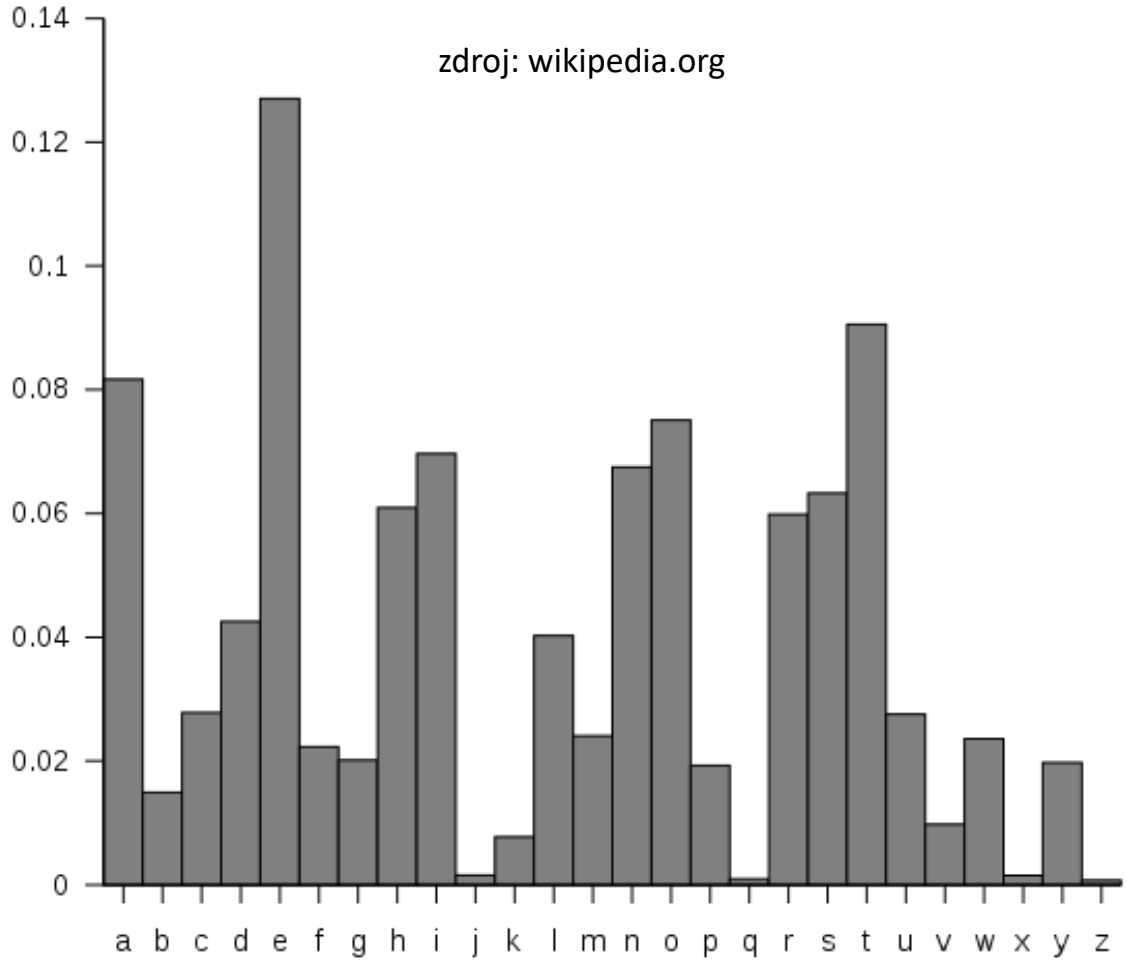
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Možnosti kryptoanalýzy monoalfabetickej substitúcie

- jazyk otvoreného textu
- medzery, predložky, spojky ...
- opakované sekvencie, známe časti textu (začiatok, koniec)
- frekvencia výskytu znakov → *frekvenčná analýza*

Frekvencia výskytov znakov v anglickom texte

zdroj: wikipedia.org



Frekvenčná analýza - príklad

- Macbeth Act 1, Scene 1

OWLPVNLG MV RVWWO;
DR VQW RTCEV RQMSSCIR VADV OW JGMEX VWXCVACI
DEO JAWYC VACMI DIV. VAC SCIJMGCRR SDJOWEQDGO
QWIVAU VW PC D ICPCG NWI VW VADV
VAC SLGVMTGUMEX FMGGDEMCR WN EDVLIC
OW RQDIS LTWE AMS NIWS VAC QCRVCIE MRGCR
WN YCIER DEO XDGGWQXGDRRCR MR RLTTGMCO
DEO NWIVLEC WE AMR ODSECO BLDIICG RSMGMEX
RAWQO GMYC D ICPCGR QAWIC PLV DGG VWW QCDY
NWI PIDFC SDJPCVA QCGG AC OCRCIFCR VADV EDSC
OMRODMEMEX NWIVLEC QMVA AMR PIDEOMRAO RVCCG
QAMJA RSWYCO QMVA PGWWOU CHCJLVMWE
GMYC FDGWLIR SMEMWE JDIFCO WLV AMR TDRRDXC
VMGG AC NDJCO VAC RGDFC
QAMJA ECCI RAWWY ADEOR EWI PDOC NDICQCGG VW AMS
VMGG AC LERCDSO AMS NIWS VAC EDFC VW VAC JADTR
DEO NMHO AMR ACDO LTWE WLI PDVVGCSCEVR.

Frekvencia v texte		Frekvencia v AJ	
C	64	E	0.12702
V	44	T	0.09056
D	41	A	0.08167
W	41	O	0.07507
R	40	I	0.06966
A	37	N	0.06749
M	37	S	0.06327
G	34	H	0.06094
E	32	R	0.05987
I	30	D	0.04253
O	28	L	0.04025
S	19	C	0.02782
Q	16	U	0.02758
L	16	M	0.02406
N	12	W	0.02360
P	11	F	0.02228
J	11	G	0.02015
X	8	Y	0.01974
T	8	P	0.01929
Y	7	B	0.01492
F	7	V	0.00978
U	3	K	0.00772
H	2	J	0.00153
B	1	X	0.00150
		Q	0.00095
		Z	0.00074

E ↔ C
T ↔ V
A ↔ D
O ↔ W
I ↔ R ?

Frekvenčná analýza príklad

- Macbeth Act 1, Scene 1
- krátke slová
  - VAC -> THE
  - VW -> TO
- využijeme vlastnosti textu
  (nie vždy musia frekvencie
  v texte odpovedať frekvenciám AJ)
- šifrovacia permutácia:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
D	P	J	O	C	N	X	A	M	Z	Y	G	S	E	W	T	B	I	R	V	L	F	Q	H	U	K

Frekvencia v texte		Frekvencia v AJ		
C	64	E	0.12702	E ↔ C
V	44	T	0.09056	T ↔ V
D	41	A	0.08167	A ↔ D
W	41	O	0.07507	O ↔ W
R	40	I	0.06966	I ↔ M
A	37	N	0.06749	
M	37	S	0.06327	
G	34	H	0.06094	
E	32	R	0.05987	
I	30	D	0.04253	
O	28	L	0.04025	
S	19	C	0.02782	
Q	16	U	0.02758	
L	16	M	0.02406	
N	12	W	0.02360	
P	11	F	0.02228	
J	11	G	0.02015	
X	8	Y	0.01974	
T	8	P	0.01929	
Y	7	B	0.01492	
F	7	V	0.00978	
U	3	K	0.00772	
H	2	J	0.00153	
B	1	X	0.00150	
		Q	0.00095	
		Z	0.00074	

Príklad substitučnej šifry bez medzier

OWLPVNLG MV RVWWO;
DR VQW RTCEV RQMSSCIR VADV OW JGMEX VWXCVACI
DEO JAWYC VACMI DIV. VAC SCIJMGCRR SDJOWEQDGO
QWIVAU VW PC D ICPCG NWI VW VADV
VAC SLGVMTGUMEX FMGGDEMCR WN EDVLIC
OW RQDIS LTWE AMS NIWS VAC QCRVCIE MRGCR
WN YCIER DEO XDGGWQXGDRRCR MR RLTTGMCO
DEO NWIVLEC WE AMR ODSECO BLDIICG RSMGMEX
RAWQO GMYC D ICPCGR QAWIC PLV DGG VWW QCDY
NWI PIDFC SDJPCVA QCGG AC OCRCIFCR VADV EDSC
OMRODMEMEX NWIVLEC QMVA AMR PIDEOMRAO RVCCG
QAMJA RSWYCO QMVA PGWWOU CHCJLVMWE
GMYC FDGWLIR SMEMWE JDIFCO WLV AMR TDRRDXC
VMGG AC NDJCO VAC RGDFC
QAMJA ECCI RAWWY ADEOR EWI PDOC NDICQCGG VW AMS
VMGG AC LERCDSO AMS NIWS VAC EDFC VW VAC JADTR
DEO NMHO AMR ACDO LTWE WLI PDVVGCSCEVR.

```
OWLPV NLGMV RVWWO DRVQW RTCEV RQMSS
CIRVA DVOWJ GMEXV WXCVA CIDEO JAWYC
VACMI DIVVA CSCIJ MGCRR SDJOW EQDGO
QWIVA UVWPC DICPC GNWIV WVADV VACSL
GVMTG UMEXF MGGDE MCRWN EDVLI COWRQ
DISLT WEAMS NIWSV ACQCR VCIEM RGCRW
NYCIE RDEOX DGGWQ XGDRR CRMRR LTTGM
CODEO NWIVL ECWEA MRODS ECOBL DIICG
RSMGM EXRAW QOGMY CDICP CGRQA WICPL
VDGGV WWQCD YNWIP IDFCS DJPCV AQCGG
ACOCR CIFCR VADVE DSCOM RODME MEXNW
IVLEC QMVAA MRPID EOMRA ORVCC GQAMJ
ARSWY COQMV APGWW OUCHC JLVMW EGMYC
FDGWL IRSME MWEJD IFCOW LVAMR TDRRD
XCVMG GACND JCOVA CRGDF CQAMJ AECCI
RAWWY ADEOR EWIPD OCNDI CQCGG VWAMS
VMGGA CLERC DSOAM SNIWS VACED FCVWV
ACJAD TRDEO NMHOA MRACD OLTWE WLIPD
VVGCS CEVRX
```

Auguste Kerckhoffs (1883)

- Kryptografický systém je bezpečný, ak útočník nie je schopný dešifrovať text ani vtedy, keď dokonale pozná postup šifrovania

Dôvernosť komunikácie je zabezpečená len znalosťou kľúča

Kryptoanalýza hrubou silou (brute-force)

- veľkosť množiny kľúčov |K| a množín |P| a |C|
  čas na testovanie kľúča vs. cena prostriedkov na realizáciu analýzy

Postupy kryptoanalýzy

- poznám len šifrovaný text, algoritmus šifrovania a charakteristiku otvoreného textu - **COA** – *ciphertext only attack*
- poznám aspoň jednu dvojicu otvoreného a šifrovaného textu **KPA** – *known-plaintext attack*
- môžem si nechať niečo zašifrovať **CPA** – *chosen-plaintext attack*
- môžem si nechať niečo dešifrovať **CCA** – *chosen-ciphertext attack*
- adaptívne varianty CPA a CCA

Ďalšie možnosti kryptoanalytických útokov

- postranné kanály (*side channels attack*)
- chyby v implementácii
- malware, spyware, ransomware …
- sociálne inžinierstvo, phishing …
- korupčná kryptoanalýza
- pendreková (*rubber-hose*) kryptoanalýza

Eliminácia útokov pomocou frekvenčnej analýzy

- homofónne šifry – monoalfabetické substitúcie, kde sa priradí frekventovaným znakom otvoreného textu náhodne jeden z viacerých znakov šifrovaného textu (napr. $e(E) \in \{X,Y\}$; $e(I) = e(J) = Z$; a pri dešifrovaní sa I a J rozlíši podľa kontextu)
- bigramové šifry – substitúcia po dvojiciach znakov (pri veľmi dlhom texte by mohla kryptoanalýze pomôcť frekvenčná analýza bigramov)
- polygramové a polyalfabetické šifry

Afinný kryptosystém

- $\Sigma_P = \Sigma_C = \{0, 1, \ldots, 25\}$
- K = $\{ (a, b) \mid a \in \{1,3,5,7,9,11,15,17,19,21,23,25\}, b \in \{0, 1, \ldots, 25\} \}$
- $e_k(x) = (ax + b) \bmod 26$
- $d_k(y) = \left(a'(y - b)\right) \bmod 26$

  kde a' je inverzný prvok k a teda $(a' . a) \bmod 26 = 1$
  to existuje práve vtedy, keď $\gcd(a, 26) = 1$

- 26 x 26 možností ?? - len 26 x 12 = 312

Playfair

- je bigramová šifra (Ch. Wheatstone 1854)
- https://en.wikipedia.org/wiki/Playfair_cipher
- frekvencia najčastejších bigramov v AJ

th 1.52	en 0.55	ng 0.18
he 1.28	ed 0.53	of 0.16
in 0.94	to 0.52	al 0.09
er 0.94	it 0.50	de 0.09
an 0.82	ou 0.50	se 0.08
re 0.68	ea 0.47	le 0.08
nd 0.63	hi 0.46	sa 0.06
at 0.59	is 0.46	si 0.05
on 0.57	or 0.43	ar 0.04
nt 0.56	ti 0.34	ve 0.04
ha 0.56	as 0.33	ra 0.04
es 0.56	te 0.27	ld 0.02
st 0.55	et 0.19	ur 0.02

Hillova šifra

- Lester Hill (1929) – polygramová šifra (m-prvkové vektory kódov znakov, násobenie maticami)

- $\Sigma_P = \Sigma_C = \{ \boldsymbol{x} = \langle x_1\ x_2\ \ldots\ x_m \rangle ;\ x_i \in \{0, 1, \ldots, 25\} \}$
- K = { m x m matica s prvkami $\in \mathbb{Z}_{26}$ *invertibilná* }
  (pre $\boldsymbol{k} \in$ K existuje $\boldsymbol{k^{-1}}$, že $(\boldsymbol{k^{-1}k}) \bmod 26 = \mathbf{I}$)
- $e_k(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{kx}) \bmod 26$
- $d_k(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{k^{-1}}(\boldsymbol{kx}) \bmod 26 = (\boldsymbol{k^{-1}k})\boldsymbol{x} \bmod 26 = \boldsymbol{x}$

Hillova bigramová šifra

pre matice 2 x 2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = (\mathrm{ad} - \mathrm{bc})^{-1} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

príklad

$k = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ HELP $\begin{pmatrix} H \\ E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L \\ P \end{pmatrix}$ $p = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \end{pmatrix}$

$e_k(p) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \ (mod\ 26)$, $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 19 \end{pmatrix} \ (mod\ 26)$

$c = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 19 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} H \\ I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A \\ T \end{pmatrix}$ HIAT

$d_k(e_k(p)) = 9^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 23 \\ 24 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 15 & 17 \\ 20 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \ (mod\ 26) \quad \ldots \begin{pmatrix} H \\ E \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 15 & 17 \\ 20 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 19 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \end{pmatrix} \ (mod\ 26) \ldots \begin{pmatrix} L \\ P \end{pmatrix}$

Ďakujem za pozornosť.

jozef.jirasek@upjs.sk