

Stratová kompresia údajov pásmový rozklad

ÚINF/KMÚ ZS 2019/20
doc. RNDr. Jozef Jirásek, PhD.

Rozdelenie na podpásma (subband coding)



- problémy DCT –
 - nerozoznáva detaily (v nižších prenosových rýchlostiach)
 - metódy na redukciu chýb na okrajoch (prekrývanie) sú zložité
 - použitie na celý obraz (zvukový záznam) je prakticky nemožné
- rozdeliť vstupnú informáciu podľa rýchlosti zmien na informácie o pomalých zmenách (dolné pásmo - aproximácia) a o rýchlych zmenách (horné pásmo - detaily)

x_n	10	14	10	12	14	8	14	12	10	8
$\frac{x_n+x_{n-1}}{2}$	10	12	12	11	13	11	11	13	11	10
$\frac{x_n-x_{n-1}}{2}$	0	2	-2	1	1	-3	3	-1	-1	-1

$$y_n = (x_n + x_{n-1})/2$$

$$z_n = x_n - y_n = (x_n - x_{n-1})/2$$



Horné a dolné pásmo - decimácia

- z informácií o hornom a dolnom pásme je možné pôvodný signál rekonštruovať

$$y_n = (x_n + x_{n-1})/2$$

$$z_n = (x_n - x_{n-1})/2$$

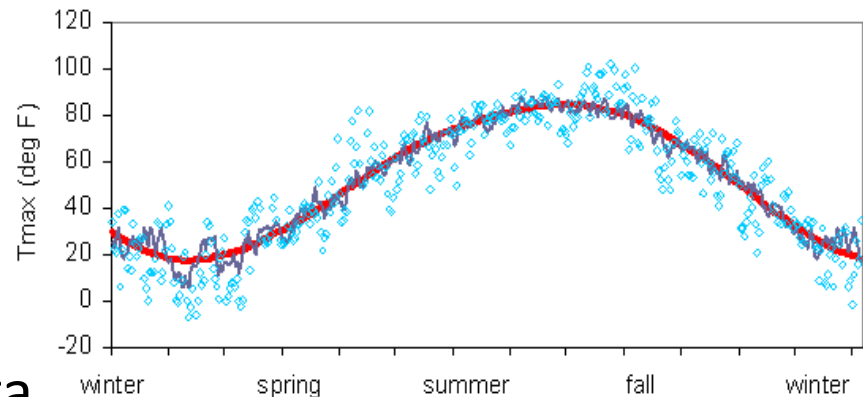
$$x_n = y_n + z_n$$

- stačí aj každá druhá hodnota

$$x_{2k-1} = y_{2k} - z_{2k} \quad x_{2k} = y_{2k} + z_{2k}$$

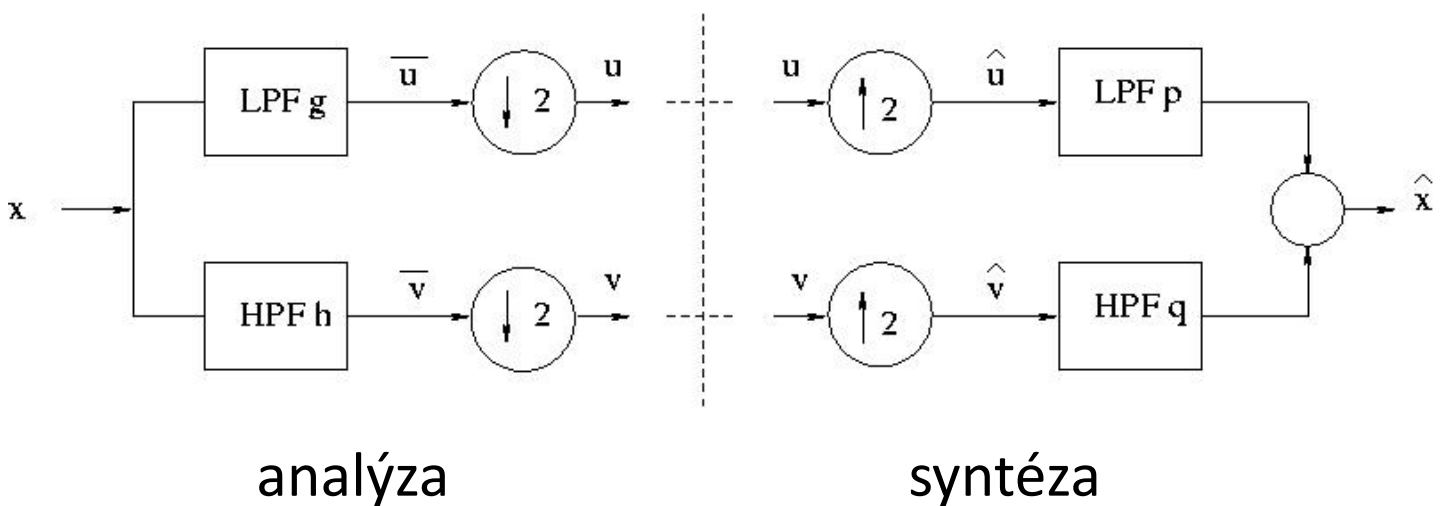
a v každom podpásme stačí preniesť len polovicu údajov (**decimácia**) s nižším rozptylom (s menšou kvantizačnou chybou)

- každú časť je možné kódovať nezávisle a rozdeliť tak kvantizačnú chybu (skreslenie) podľa požadovaných parametrov (v závislosti od použitia komprimovaného kódu)



Rekonštrukcia z pásmových rozkladov

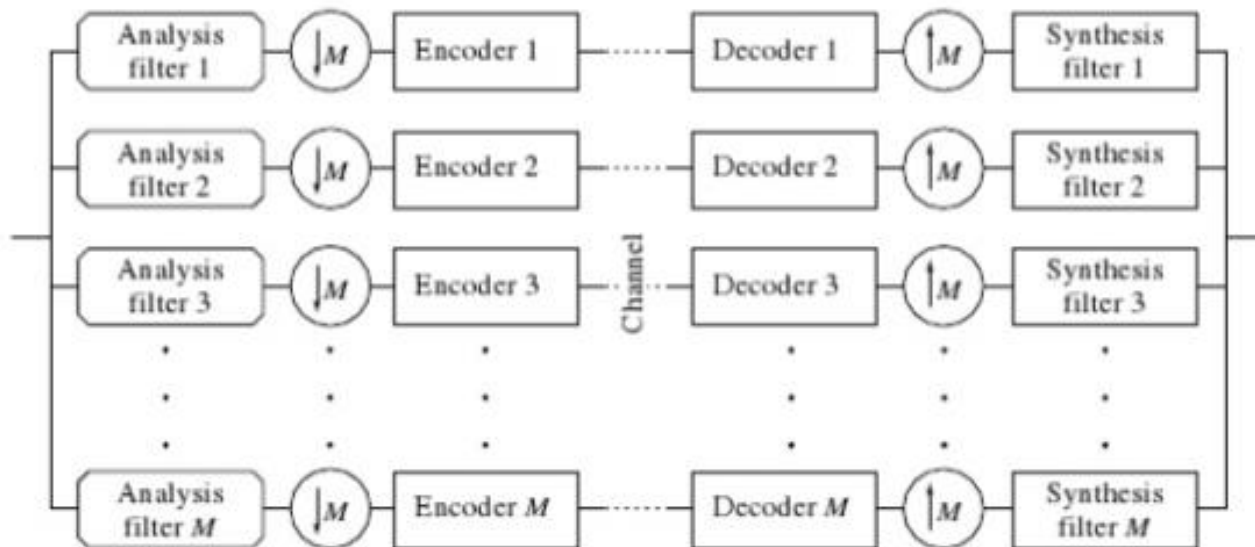
- rozloženie vstupu pomocou dolnopásmového (low-pass) a hornopásmového (high-pass) analytického filtra
- decimácia – **podvzorkovanie** (downsampling)
- po **nadvzorkovaní** (upsampling) a filtrovaní vhodnými syntetickými filterami je možné vstup rekonštruovať bez chýb



Postup komprimácie pomocou podpásiem

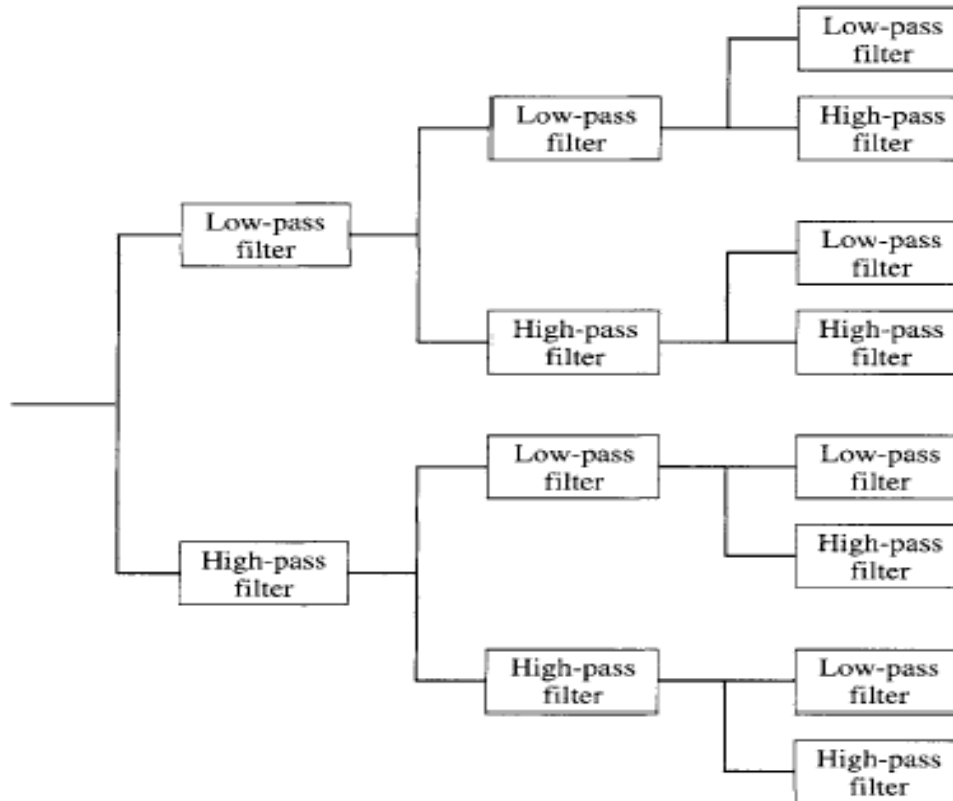


- rozložiť vstup na podpásmo, podvzorkovať, kvantizovať podľa modelu používateľa, entropicky zakódovať;
- rekonštruovaný výsledok dosiahneme dekódovaním, nadvzorkovaním a syntézou z podpásiem



Hierarchická dekompozícia

- rekurzívne postupným rozpoľovaním spektra





Digitálne filtre

- vo všeobecnosti sú digitálne filtre tvorené váženým súčtom aktuálneho a minulých vstupov a tiež aj minulých výstupov

$$y_n = \sum_{i=0}^N a_i x_{n-i} + \sum_{i=1}^M b_i y_{n-i}$$

- výsledok filtrovania pre vstup 1,0,0,0 ... charakterizuje filter a nazýva sa odpoveď na impulz (impulse response)
- ak sú všetky $b_i = 0$, odpoveď na impulz po N vstupoch zanikne, hovoríme o **FIR** (finite impulse response) – filtroch s konečnou odpoveďou na impulz
- ak je nejaké $b_i \neq 0$, odpoveď nezanikne, hovoríme o **IIR** (infinite impulse response) filtroch (s nekonečnou odpoveďou na impulz)



Digitálne filtre – príklady

- pre $a_0 = 1.25$ $a_1 = 0.5$ bude odpoveď na impulz $h_0 = 1.25$ $h_1 = 0.5$ ostatné $h = 0$
 - je to dvojnásobný FIR filter (z odpovede na impulz je možné vypočítať všetky koeficienty filtra)
- v úvodnom príklade boli použité filtre FIR $\{1/2, 1/2, 0, \dots\}$ a $\{1/2, -1/2, 0, \dots\}$
- nech $a_0 = 1$ $b_1 = 0.9$, dostaneme IIR $\{1, 0.9, (0.9)^2, \dots (0.9)^i \dots\}$ (IIR filtre sa používajú aj na zahľadzovanie ostrých zmien)
- FIR filtre sú stabilné (hodnota výstupu neprekročí určité hranice) $y_n = \sum_{k=0}^M h_k x_{n-k}$
- výstup možno počítat podľa odpovede na jednotkový impulz



Maticový zápis FIR filtrov

- $y_n = \sum_{k=0}^M h_k x_{n-k}$
- všeobecne môžeme predpokladať súvislý signál, preto

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & \\ \cdots & h_2 & h_1 & h_0 & 0 & \cdots & \\ \cdots & 0 & h_2 & h_1 & h_0 & \cdots & \\ \cdots & 0 & 0 & h_2 & h_1 & h_0 & \\ & & & \ddots & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

napr.

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\ & & & \ddots & & \end{bmatrix} \text{ alebo } \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ \cdots & -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots \\ & & & \ddots & & \end{bmatrix}$$



uchovanie informácie

- filtre môžu spôsobovať stratu – v uvedených príkladoch pre $\{\dots -1, 1, -1, 1, \dots\}$ resp. $\{\dots 1, 1, 1, 1, \dots\}$
- môžeme kombinovať dva vzájomne ortogonálne filtre

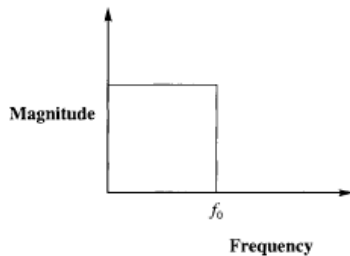
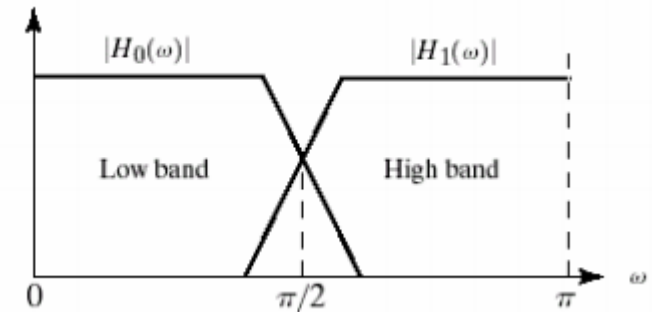
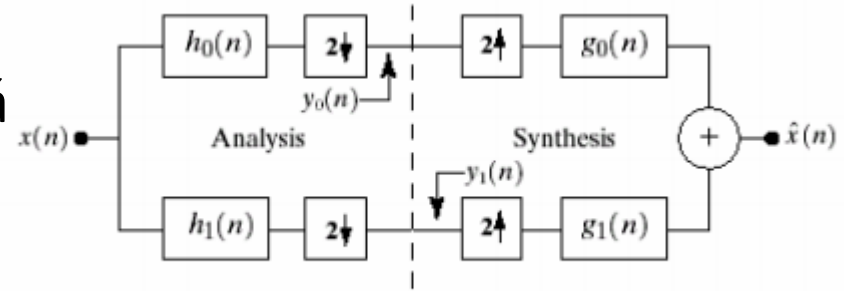
$$\begin{bmatrix} \vdots & & & & & & & & \\ \dots & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & 0 & 0 & \dots & \\ \dots & H_3 & H_2 & H_1 & H_0 & 0 & 0 & \dots & \\ \dots & 0 & 0 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & \dots & \\ & 0 & 0 & H_3 & H_2 & H_1 & H_0 & \dots & \\ & & & & & \vdots & & & \end{bmatrix}$$

- filtre rozložia signál na dve podpásma, z ktorých je možné získať späť pôvodný signál

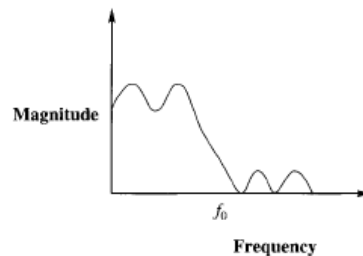
Rekonštrukcia z pásmových rozkladov

analytické a syntetické filtre
treba vybrať tak, aby bola možná
perfektná rekonštrukcia signálu

(dá sa ukázať, že vtedy musí
každému syntetickému filteru
odpovedať analytický
s opačným znamienkom)



digitálny filter



analógový filter



ortogonálne filtre

- strata nenastane, ak bude matica ortogonálna (ortonormálna)
- ak filter spolu so všetkými svojimi párnymi posunmi tvorí ortonormálnu množinu vektorov
$$\sum_i h_i h_{i+2k} = \delta_k \quad \text{a} \quad H_k = (-1)^k h_{1-k} \quad \text{potom } h \text{ a } H \text{ tvoria ortogonálnu transformáciu}$$

- napríklad

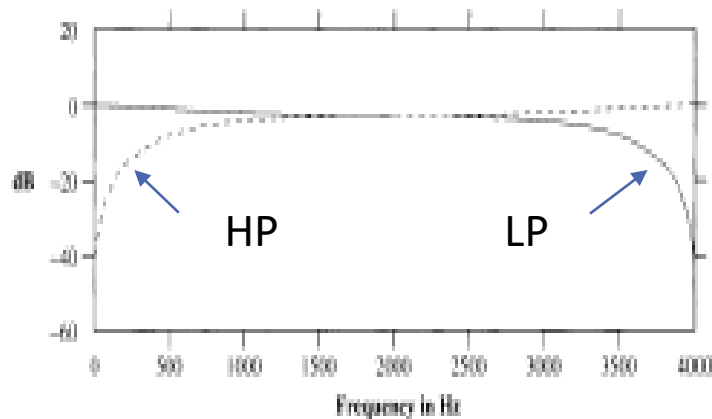
$$\{h_3, h_2, h_1, h_0\} = \frac{1}{4\sqrt{2}} (1 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$$

$$\{H_3, H_2, H_1, H_0\} = \frac{1}{4\sqrt{2}} (-1 + \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}, -3 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$$



QMF (quadrature mirror filters)

- kvadrátúrne zrkadlové filtre – umožňujú úplnú rekonštrukciu vstupného signálu
- LPF $\{h_n\}$ HPF $\{H_n\}$ $H_n = (-1)^n h_{N-1-n}$ $h_{N-1-n} = h_n$ pre $n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$
- Johnstonove filtre (symetrické) (zachovávajú energiu)



h_0, h_7	0.00938715
h_1, h_6	0.06942827
h_2, h_5	-0.07065183
h_3, h_4	0.48998080

8-tap Johnston



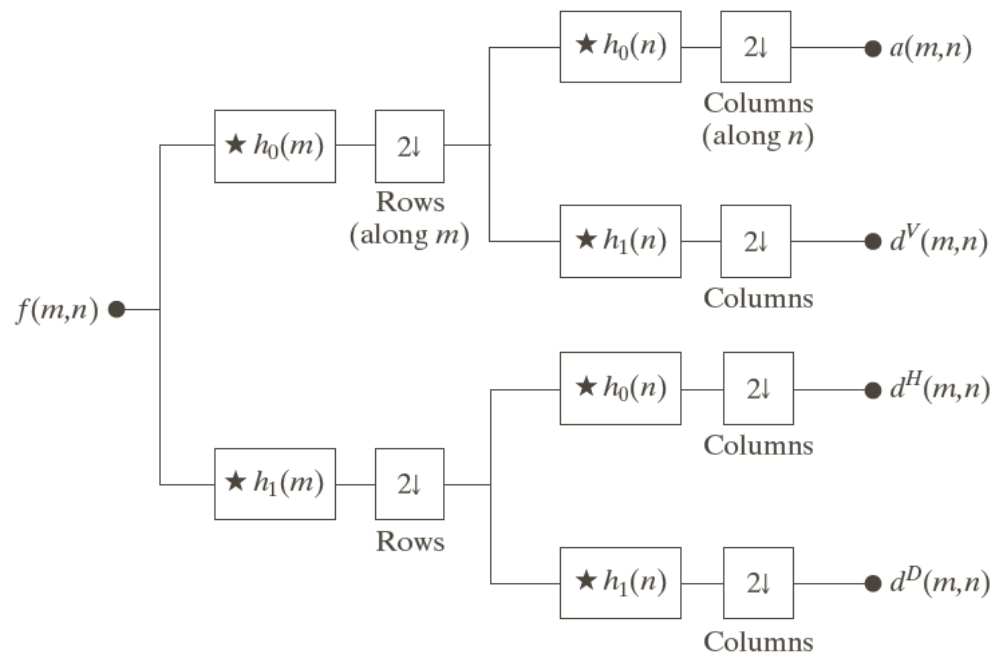
aplikácie v kódovaní zvuku

- hierarchická dekompozícia
- viacpásmový rozklad
- využitie psychoakustického modelu - maskovanie



aplikácie v kódovaní obrazu

- separabilná dekompozícia



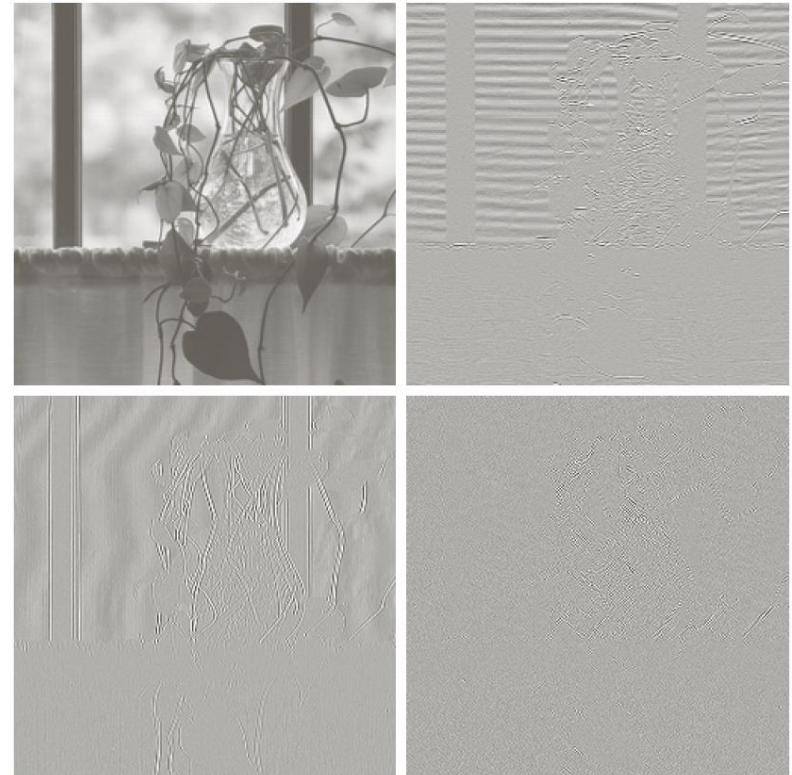
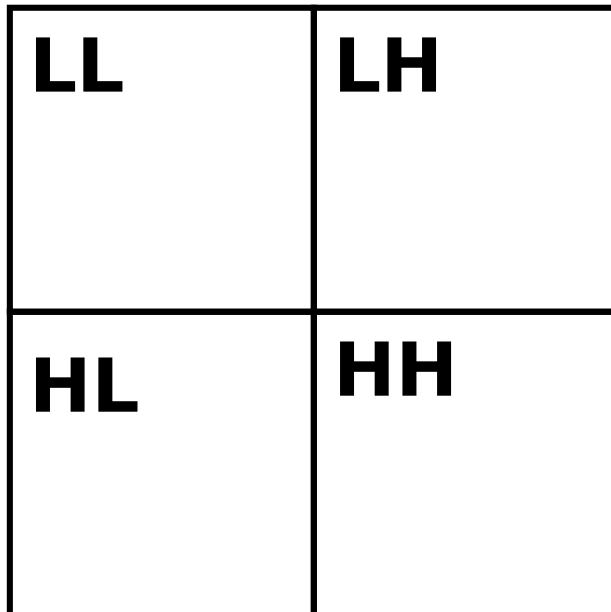
aproximácia
LL

vertikálne
podpásmo LH

horizontálne
podpásmo HL

diagonálne
podpásmo HH

rozklad obrazu na podpásma



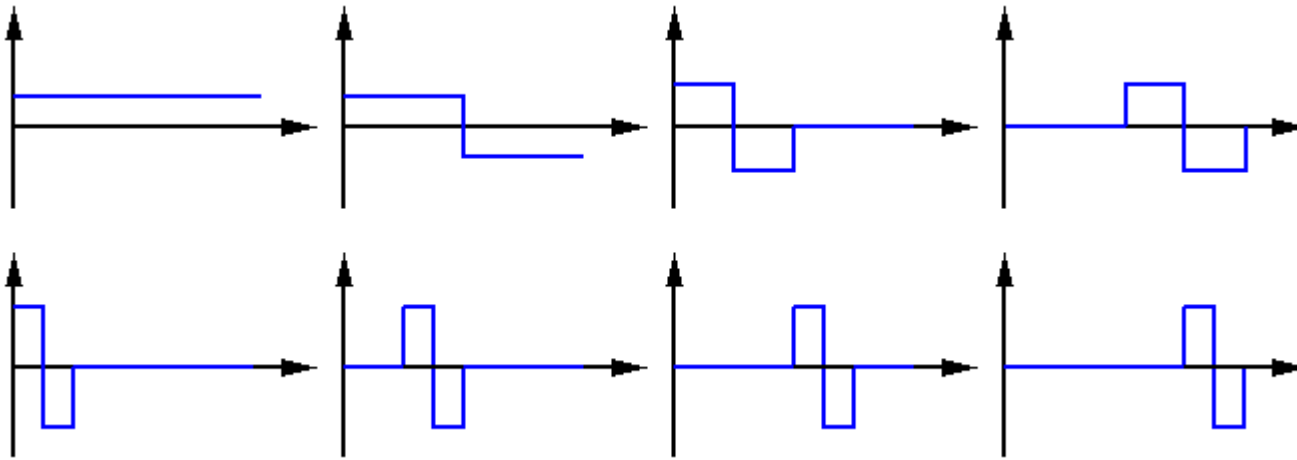


Vlnkové (wavelet) transformácie

- vlnkové transformácie – špeciálny prípad vzájomne ortonormálnych FIR filtrov
- rozdelia vstup na podpásma frekvenčným aj časovým rozkladom (DCT rozkladá len vo frekvenčnom pásme)

Haarova transformácia

- bázu tvoria ortonormálne wavelety (vlnky)



$$h_0(t) = 1/\sqrt{N} \quad h_k(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{cases} 2^{p/2} & (q-1)/2^p \leq t < (q-0.5)/2^p \\ -2^{p/2} & (q-0.5)/2^p \leq t < q/2^p \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_8 = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \varphi_0(t) \\ \psi_0(t) \\ \psi_{1,0}(t) \\ \psi_{1,1}(t) \\ \psi_{2,0}(t) \\ \psi_{2,1}(t) \\ \psi_{2,2}(t) \\ \psi_{2,3}(t) \end{matrix}$$

Vlnková transformácia s Haarovymi waveletmi



- pre

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- $HW_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix}$

- je ortonormálna a symetrická - $HW^T = HW$



stratová kompresia pomocou HWT

- vstup (veľkosti 2^n) transformujeme HW s upraveným poradím riadkov – na rozklad na dolné L a horné H pásmo

$$\bullet \text{ HWT} \cdot \mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} L_1 \\ H_1 \end{bmatrix}$$

$$\text{a rekurentne } \mathbf{y}_{i+1} = \begin{bmatrix} \text{HWT} \cdot L_i \\ H_i^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{i+1} \\ H_{i+1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{i+1} \\ H_{i+1}^* \end{bmatrix} \quad H_1^* = H_1$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_n = [L_n, H_n, \dots, H_1]^T \quad \dim(L_i) = \dim(H_i) = 2^{n-i}$$

stratová kompresia pomocou HWT



- výsledný vektor $\mathbf{y} = [L_n, H_n, \dots, H_1]^T$ ($\dim(H_i) = 2^{n-i}$)
je možné v každej časti L_n, H_n, \dots, H_1 kvantizovať rôznymi kvantizačnými filtrami

dvojrozmerné waveletové transformácie



- navyše potrebuje separabilné transformácie

platí pre HWT, teda keď pri transformácii v každom kroku rekurentného postupu použijeme HWT na riadky a ešte aj na stĺpce (HWT je symetrická)

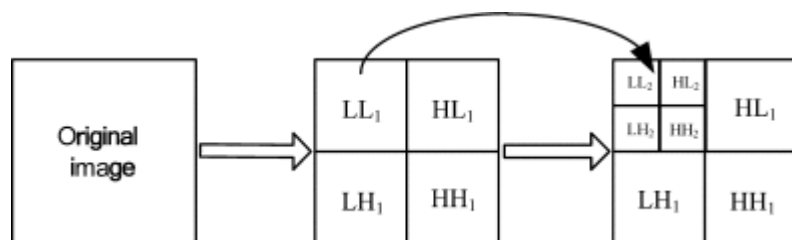
– dostaneme rozklad ->

LL	LH
HL	HH

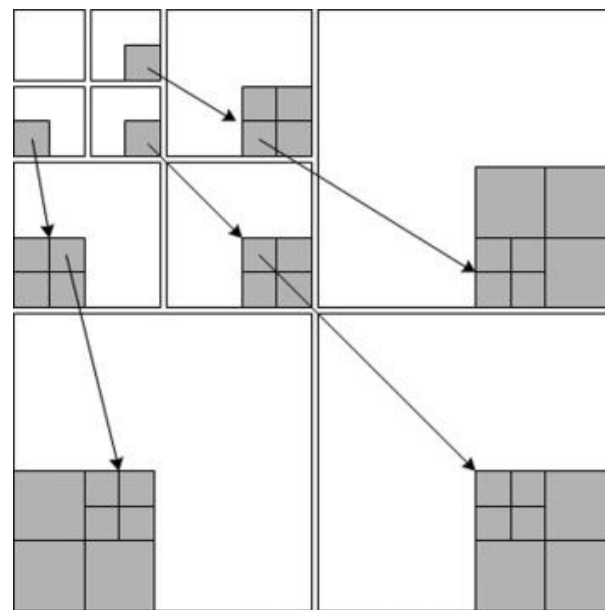
v ďalšom rozkladáme už len LL ...

- každý kvadrant môžeme kvantizovať nezávisle

dekompozícia obrazu



dominantné usporiadanie



(a)



(b)

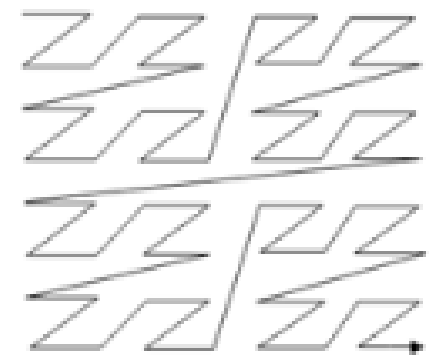
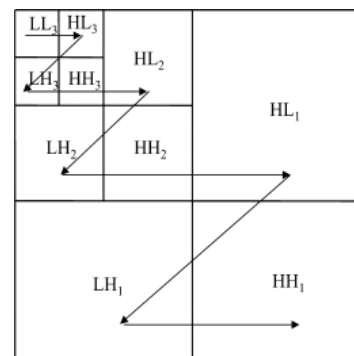
EZW kóder pre waveletové transformácie



EZW - embedded zero-tree wavelet algorithm

- T – prah (threshold) $[T, 2T)$ $T_0 = 2^{\lfloor \log_2 c_{max} \rfloor}$
 - $|c| \geq T$ významná hodnota P, N (pozitívna, negatívna)
 - $|c| < T$ Z – zero-tree root – ak všetci nasledovníci sú $< T$
 - I – isolated zero – inak
- len 4 kódy (2 bitové) - P, N, Z, I

dominantný prechod – kódovanie polí (ktoré ešte neboli zaradené do subordinačného zoznamu) v dohodnutom poradí po vrstvách – v nasledujúcej vrstve pokračuje kódovanie len vtedy, keď dominantné pole nebolo Z



EZW kóder pre waveletové transformácie



subordinačný prechod - do subordinačného zoznamu (subordinate list) sa pridajú nové P a N hodnoty a do rekonštruovaného zoznamu ich rekonštruované ekvivalenty $\pm 1,5 T$ (takto by sa rekonštruovali pri dekódovaní) celý rekonštruovaný zoznam sa po prvkoch porovná so subordinačným, rekonštruovaný zoznam sa upraví o korekcie veľkosti $\pm T/4$ (smerom k hodnotám v subordinačnom zozname) a do výstupného kódu sa pridá za každý prvok podľa korekcie jeden bit 0/1

- $T = T/2$ a pokračujeme dominantným prechodom (prvky v subordinačnom zozname nekódujeme a pre porovnania majú hodnotu 0) a subordinačným prechodom
- všetko opakujeme až po požadovanú úroveň resp. veľkosť komprimovaného súboru

Dekódovanie EZW



- pri dekódovaní rekonštruujeme pozície v matici podľa pravidiel dvojúrovňovej kvantizácie (budeme dostávať hodnoty, aké boli pri kódovaní v rekonštruovanom zozname) a v ďalších prechodoch ich budeme korigovať
- pozície, ktoré pri kódovaní nevstúpili do subordinačného zoznamu, dekódujeme nulami



Príklad

(T=32) P Z I Z Z Z P Z Z Z Z Z
{53,34}/{48,48} -> {56,40} 1 0

(T=16) N Z Z P Z Z Z Z Z Z Z Z
{53,34,-22,21}/{56,40,-24,24}
-> {52,36,-20,20} 0 0 1 0

(T=8) P N N P N P N Z
P Z Z P Z P Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z
Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z
Z Z Z Z Z Z Z Z
{53,34,-22,21,14,-12,-9,13,-11,
15,-8,9,10,8}/{52,36,-20,20,
12,-12,-12,12,-12,12,-12,12,12,12}
-> {54,34,-22,22,14,-10,-10,14,-10,14,-10,10,10,10}
1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0

53	-22	21	-9	-1	8	-7	6
14	-12	13	-11	-1	0	2	-3
15	-8	9	7	2	-3	1	-2
34	-2	-6	10	6	-4	4	-5
-6	5	-1	1	1	3	-1	5
6	1	3	0	-2	2	6	0
4	2	1	-4	-1	0	-1	4
0	-2	7	5	-3	2	-2	3

Príklad – pokračovanie



(T=4) I P N Z Z Z N P Z Z
 Z Z P N Z Z P N N P P Z
 Z Z Z Z P Z Z Z Z N P P
 Z Z Z Z Z P P Z Z Z Z Z P Z Z

*	*	*	*	-1	*	-7	6
*	*	*	*	-1	0	2	-3
*	*	*	7	2	-3	1	-2
*	-2	-6	*	6	-4	4	-5
-6	5	-1	1	1	3	-1	5
6	1	3	0	-2	2	6	0
4	2	1	-4	-1	0	-1	4
0	-2	7	5	-3	2	-2	3

{53,34,-22,21,14,-12,-9,13,-11,15,-8,9,10,8,7,-6,-7,6,6,-4,4,-5,-6,5,6,4,-4,7,5,5,6,4}/

{54,34,-22,22,14,-10,-10,14,-10,14,-10,10,10,10,6,-6,-6,6,6,-6,6,-6,-6,6,6,6,-6,6,6,6,6,6}

->

{53,35,-21,21,15,-11,-9,13,-11,15,-9,9,11,9,7,-5,-7,7,7,-5,5,-5,-5,5,7,5,-5,7,5,5,7,5}

0 1 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 0 1 0

Ďakujem za pozornosť.

jozef.jirasek@upjs.sk