Centralizovaný broadcasting v rádiových sieťach s k-degenerovanými grafmi dosiahnuteľnosti

F. Galčík G. Semanišin

Ústav informatiky, PF UPJŠ Košice

ITAT, 2006

Obsah prezentácie

1. Úvod
   - Motivácia a model rádiových sietí
   - Problém broadcastingu
   - Pár slov o k-degenerovaných grafoch
2. Dolné ohraničenie
   - $\Omega(\log n)$ dolné ohraničenie najhoršieho prípadu
3. Horné ohraničenie
   - Algoritmus pre bipartitné k-degenerované grafy
   - Algoritmus pre neorientované k-degenerované grafy
4. Zhrnutie

Motivácia k štúdiu rádiových sietí

Prečo študovať rádiové siete ?

- relatívne nízke náklady na vybudovanie komunikačnej infraštruktúry
- mobilita používateľov
- množstvo potencialných aplikácií
  - bezdrôtová komunikácia
  - senzorové siete
  - vojenské aplikácie

Čo je to rádiová sieť ?

- kolekcia vysielaco-prijímacích rádiových zariadení (uzlov)
- komunikácia prostredníctvom zasielania správ
- práca v globálne synchronizovaných časových slotoch (kolách)
- zariadenie v každom kole pracuje buď ako prijímač alebo ako vysielač
- topológia siete modelovaná grafom dosiahnuteľnosti

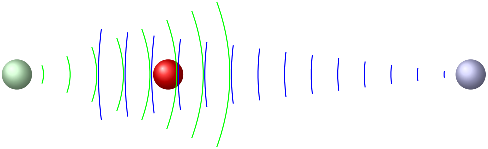
Graf dosiahnuteľnosti rádiovej siete

Graf dosiahnuteľnosti rádiovej siete je orientovaný graf $G = (V, E)$, kde

- množina vrcholov V zodpovedá uzlom siete
- hrana $e = (u, v) \in E \iff$ uzol v je v dosahu vysielania uzla u

Charakteristické aspekty rádiovej komunikácie

- interferencia súčasného vysielania
  - nastáva, ak uzol-prijímač je v danom kole v dosahu dvoch vysielajúcich uzlov (hovoríme, že nastáva kolízia)



- všesmerovosť vysielania
  - uzol vysiela vždy všetkým uzlom ležiacim v jeho dosahu

Problém broadcastingu

- jedna zo základných komunikačných úloh
- cieľom je doručiť správu z vybraného uzla siete (zdroja) do všetkých ostatných uzlov siete
- nami skúmaná miera efektívnosti: čas potrebný na splnenie úlohy

Centralizovaný rádiový broadcasting

- existuje centrálne riadenie, ktoré pozná topológiu siete a riadi akcie uzlov siete
- cieľom je vygenerovať v polynomiálnom čase čo najefektívnejší (najkratší) rozvrh vysielaní

Problém broadcastingu (prehľad známych výsledkov)

Ohraničenia času centralizovaného rádiového broadcastingu pre najhorší prípad:

- neorientované grafy
  - dolné ohraničenie $\Omega(D + \log^2 n)$: Alon a kolektív, 1991
  - horné ohraničenie $O(D + \log^2 n)$: Kowalski a Pelc, 2006
- planárne grafy
  - horné ohraničenie $3.D$: Galčík, Gasieniec a kolektív, 2005

. . . ďalšie ohraničenia pre prípad distribuovaného riadenia vzhľadom na rôzne komunikačné scenáre

k-degenerované grafy

Definícia

Nech k je nezáporné celé číslo. Graf G sa nazýva *k-degenerovaný* (píšeme $G \in \mathcal{D}_k$), ak každý podgraf H grafu G má minimálny stupeň menší než k.

- každý planárny graf je 5-degenerovaný
- pre každý graf existuje také k, že je k-degenerovaný

Problém

Umožňujú k-degenerované grafy (pre nejaké k) rýchly centralizovaný rádiový broadcasting ?

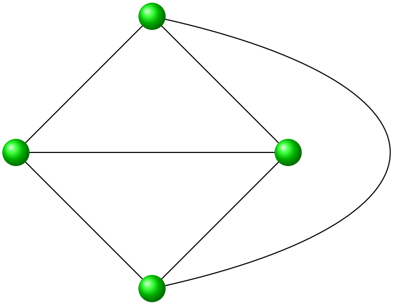
$\Omega(\log n)$ dolné ohraničenie

Dolné ohraničenie

Nech k je ľubovoľné celé číslo, $k \geq 2$. Potom existuje podmnožina $\mathcal{C}$ množiny k-degenerovaných grafov s priemerom 2 takých že:

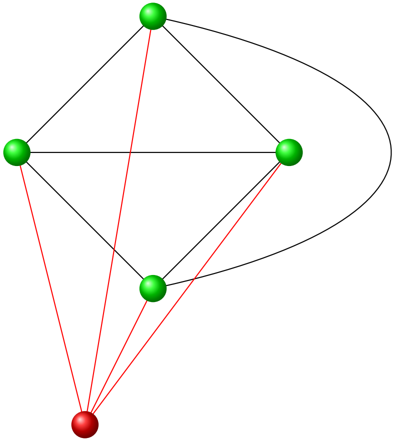
1. pre každé n, $n \geq 9$, existuje graf $G \in \mathcal{C}$ taký, že $|V(G)| = n$;
2. pre každý graf $G \in \mathcal{C}$ existuje uzol $s \in V(G)$ taký, že každý rozvrh realizujúci rádiový broadcasting vzhľadom na graf G a zdroj s má dĺžku $\Omega(\log n)$, kde $n = |V(G)|$ je počet uzlov grafu.

$\Omega(\log n)$ - náčrt dôkazu



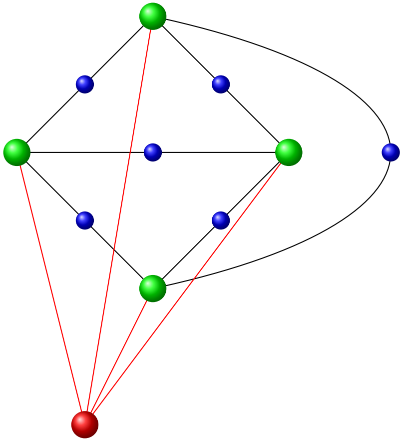
- K_n (kompletný graf na n vrcholoch)

$\Omega(\log n)$ - náčrt dôkazu



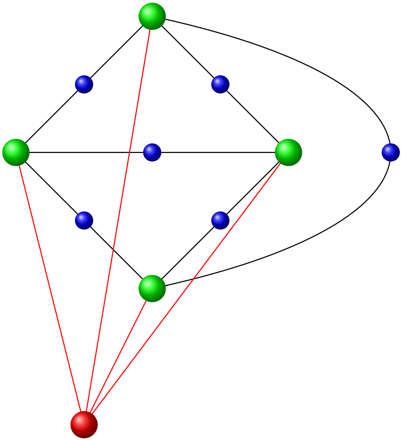
- K_n (kompletný graf na n vrcholoch)
- pridáme nový (zdrojový) vrchol a spojíme ho s každým vrcholom K_n

$\Omega(\log n)$ - náčrt dôkazu



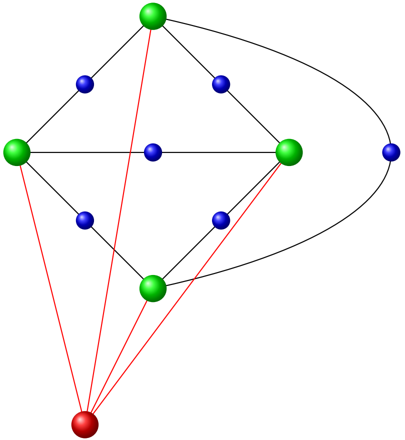
- K_n (kompletný graf na n vrcholoch)
- pridáme nový (zdrojový) vrchol a spojíme ho s každým vrcholom K_n
- každú hranu pôvodného K_n prerozdelíme novým vrcholom

$\Omega(\log n)$ - náčrt dôkazu



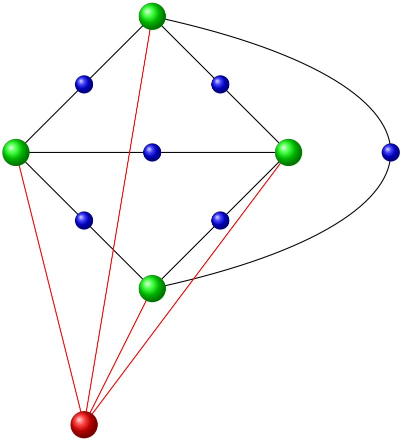
- K_n (kompletný graf na n vrcholoch)
- pridáme nový (zdrojový) vrchol a spojíme ho s každým vrcholom K_n
- každú hranu pôvodného K_n prerozdelíme novým vrcholom
- skonštruovaný graf je 2-degenerovaný

$\Omega(\log n)$ - náčrt dôkazu



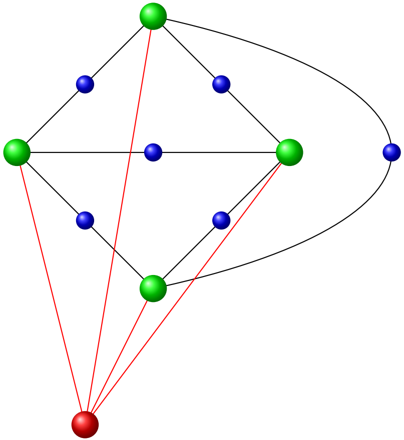
- vrstvy podľa vzdialenosti od zdroja: L_0 (zdroj), L_1, L_2
- vysielanie zdroja informuje všetky vrcholy z L_1
- ostáva informovať vrcholy z L_2 ...

$\Omega(\log n)$ - náčrt dôkazu



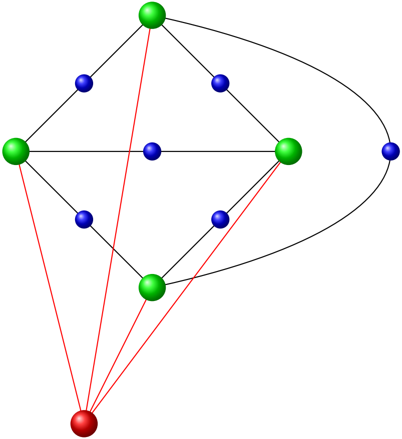
- uvažujme ľubovoľný rozvrh realizujúci broadcasting
- každému vrcholu z L_1 priradíme binárnu postupnosť, podľa toho, či v danom kole vysiela:
  - 0 - nevysiela
  - 1 - vysiela

$\Omega(\log n)$ - náčrt dôkazu



- vrchol z L_2 prijíma v nejakom kole bez kolízie práve vtedy, ak majú obaja jeho susedia z L_1 rôzne postupnosti ...
- ...vrcholy z L_1 majú navzájom rôzne postupnosti

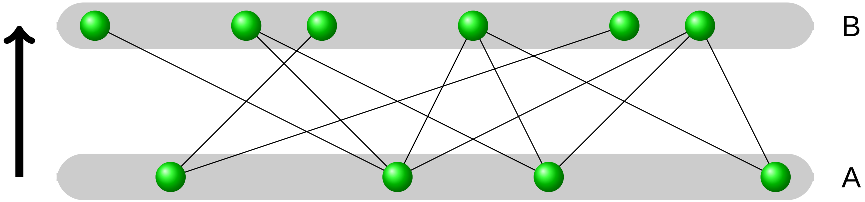
$\Omega(\log n)$ - náčrt dôkazu



- vrchol z L_2 prijíma v nejakom kole bez kolízie práve vtedy, ak majú obaja jeho susedia z L_1 rôzne postupnosti ...
- ... vrcholy z L_1 majú navzájom rôzne postupnosti

$\Longrightarrow$ dĺžka postupností je aspoň $\log n$

Algoritmus pre bipartitné k-degenerované grafy



- Chceme algoritmus generujúci rozvrh vysielaní (čo najkratší), ktorý informuje všetky vrcholy v partícii B za predpokladu, že všetky vrcholy v partícii A sú informované.

Algoritmus pre bipartitné k-degenerované grafy

Algoritmus (generovaný rozvrh) bude pracovať v 2 fázach:

- 1. fáza informuje vrcholy v partícii B tak, že po jej skončení majú neinformované vrcholy v B stupeň nanajvýš k
- 2. fáza informuje neinformované vrcholy z B

Dĺžka vygenerovaného rozvrhu:

- 1. fáza: $\lceil k^2/2 \rceil + k$
- 2. fáza: $O((1 + \log k) \log |B|)$

Algoritmus: 1. fáza

Tvrdenie (D.R.Lick a A.R.White, 1970)

Graf G s $k+m$ vrcholmi je k-degenerovaný práve vtedy, ak vrcholy z $V(G)$ ide označiť ako $v_1, v_2, \ldots, v_{k+m}$ takým spôsobom, že v indukovanom podgrafe $\langle\{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{k+m}\}\rangle$ grafu G platí $\deg(v_i) \leq k$ pre každé $i = 1, 2, \ldots, m-1$.

- Označenie s danými vlastnosťami možno ľahko algoritmicky nájsť.

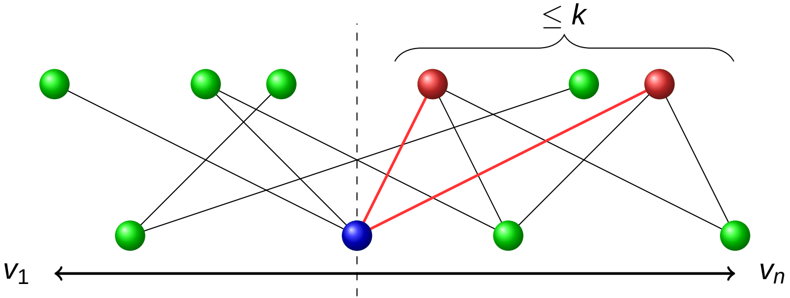
Algoritmus: 1. fáza

Tvrdenie (D.R.Lick a A.R.White, 1970)

Graf G s $k+m$ vrcholmi je k-degenerovaný práve vtedy, ak vrcholy z $V(G)$ ide označiť ako $v_1, v_2, \ldots, v_{k+m}$ takým spôsobom, že v indukovanom podgrafe $\langle\{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{k+m}\}\rangle$ grafu G platí $\deg(v_i) \leq k$ pre každé $i = 1, 2, \ldots, m-1$.

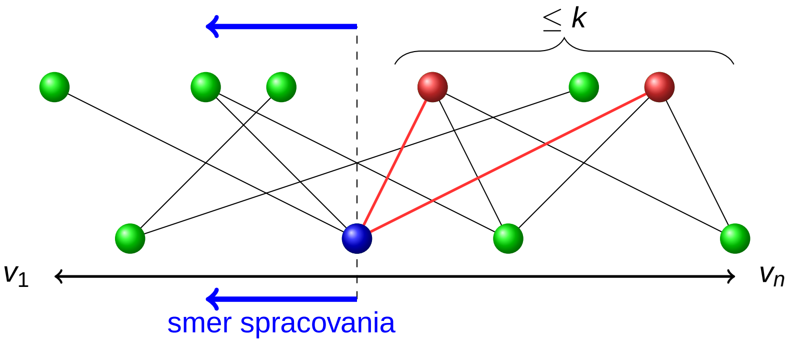
- Označenie s danými vlastnosťami možno ľahko algoritmicky nájsť.

Algoritmus: 1. fáza



$$N_{deg}(v_i) = \{v_j \in V(G) : (v_i, v_j) \in E(G) \wedge j > i\}$$

Algoritmus: 1. fáza



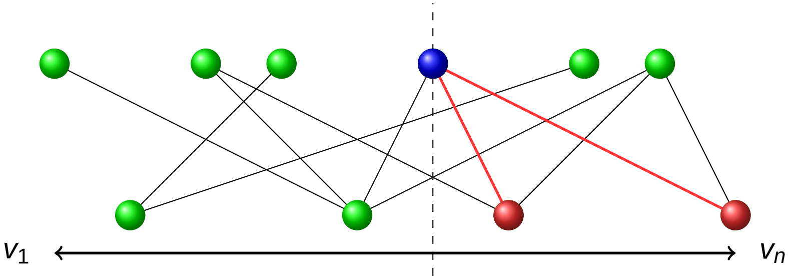
$$N_{deg}(v_i) = \{v_j \in V(G) : (v_i, v_j) \in E(G) \wedge j > i\}$$

Algoritmus: 1. fáza

- každému vrcholu $v_i \in A \cup B = V(G)$ priradíme číslo $round(v)$ z množiny $R \cup \{NIL\}$, kde $R = \{1, \dots, \lceil k^2/2 \rceil + k\}$
- iniciálne $round(v_i) = NIL$, $\forall v_i \in V(G)$
- ak $v_i \in A$, tak $round(v_i)$ je kolo, v ktorom má vrchol vysielať
- ak $v_i \in B$, tak $round(v_i)$ je kolo, v ktorom vrchol garantovane príjme správu bez kolízie
- pri určovaní $round(v_i)$ uvažujeme len susedov z $N_{deg}(v_i)$

Algoritmus: 1. fáza - spracovanie $v_i \in B$

- ak niektorý zo susedov z $N_{deg}(v_i)$ má priradené jedinečné kolo, tak ho priradíme do $round(v_i)$
- inak $round(v_i) := NIL$



Algoritmus: 1. fáza - spracovanie $v_i \in A$

Definujme:

$$Used(v_m) = \{round(v) : v \in N_{deg}(v_m)\}$$

Pre $v_i \in A$ určíme množiny:

$$Unassigned = \{v_j \in N_{deg}(v_i) : round(v_j) = NIL\}$$

$$Assigned = N_{deg}(v_i) \setminus Unassigned$$

$$Used^* = \bigcup_{v_j \in Unassigned} Used(v_j)$$

$$Used = \{round(v_j) : v_j \in Assigned\} \cup Used^*$$

Ako $round(v_i)$ vyberieme ľubovoľné číslo z $R \setminus Used$.

Algoritmus: 1. fáza

- po prvej fáze nie sú informované nanajvýš také vrcholy z B, pre ktoré $N(v_i) = N_{deg}(v_i)$, t.j. všetci ich susedia sú "vpravo"
- neinformované vrcholy majú stupeň $\leq k$
- počet kôl: $\lceil k^2/2 \rceil + k$

Algoritmus: 2. fáza

Definícia

Pre danú kolekciu $\mathcal{F}$ podmnožín množiny $[n] = \{1, \ldots, n\}$, *výberovou množinou* $\mathcal{F}$ nazývame takú kolekciu $\mathcal{S}$ podmnožín množiny $[n]$, že pre každé $F \in \mathcal{F}$ existuje $S \in \mathcal{S}$ spĺňajúce $|F \cap S| = 1$.

Tvrdenie (Clementi a kol., 2001)

Existuje algoritmus, ktorý pre danú kolekciu $\mathcal{F}$, ktorej prvky sú množiny v rozsahu $[\Delta_{min}, \Delta_{max}]$, vypočíta výberovú množinu $\mathcal{S}$ pre $\mathcal{F}$ veľkosti $O((1 + \log(\Delta_{max}/\Delta_{min})). \log|\mathcal{F}|)$. Časová zložitosť algoritmu je $O(n^2|\mathcal{F}|\log|\mathcal{F}|.(1 + \log(\Delta_{max}/\Delta_{min})))$.

Algoritmus: 2. fáza

- aplikujeme algoritmus z predchádzajúceho tvrdenia na $\mathcal{F} = \{\{j : v_j \in N(v_i)\} : v_i \in B \text{ je neinformovaný}\}$
- dĺžka rozvrhu: $O((1 + \log k) \log |B|)$

Sumarizácia

Máme polynomiálny algoritmus generujúci rozvrh dĺžky $\lceil k^2/2 \rceil + k + O((1 + \log k) \log |B|)$.

Algoritmus pre neorientované k-degenerované grafy

- vrcholy podľa vzdialenosti od zdroja môžeme rozdeliť do vrstiev (hrany grafu sú iba medzi susednými vrstvami alebo medzi vrcholmi v rovnakej vrstve)
- podgraf k-degenerovaného grafu je k-degenerovaný graf $\Longrightarrow$ medzivrstvové grafy sú k-degenerované
- jednoduchý broadcastovací princíp: zdrojovú správu šírime po vrstvách použitím algoritmu pre bipartitné grafy
- dĺžka rozvrhu: $D.(\lceil k^2/2 \rceil + k + O((1 + \log k) \log \frac{n}{D})) = O_k(D \log n/D)$

Zhrnutie

- $\Omega(\log n)$ dolné ohraničenie pre 2-degenerované grafy s priemerom 2
- $O_k(D \log n/D)$ centralizovaný broadcastovací algoritmus pre triedu k-degenerovaných grafov
- rýchlejší centralizovaný broadcasting pre triedu k-degenerovaných grafov (pre fixované k) s priemerom $o(\log n)$