Neuromaty - akceptory regulárnych jazykov

ÚINF/NEU/02

September 25, 2023

Výpočtová sila neurónových sietí

- Aj keď sú neurónové siete výpočtovými modelmi motivovanými predstavami o fungovaní mozgu, ich výpočtovú silu a efektívnosť možno študovať a porovnávať s inými modelmi v rámci informatiky.
- Znamená to porovnať výpočtovú silu neurónových sietí s tradičnými výpočtovými modelmi, ako sú konečné automaty a Turingove stroje.

Motivácia

Neurónové siete (NS) – neurónové akceptory jazykov (nad binárnou abecedou).
Sú analyzované dva typy vstupných protokolov:

1. Neurónová sieť, v ktorej je len jeden neurón pre vstupné slovo (vstupný neurón postupne číta bity vstupného slova).
   Tu sa pracuje s diskrétnymi alebo analógovými modelmi NS.
2. Existuje postupnosť neurónových sietí – pre každú dĺžku vstupného slova existuje jedna neurónová sieť s odpovedajúcim počtom neurónov.

V oboch prípadoch, **stav výstupného neurónu** vyjadruje, či vstupné slovo patrí do jazyka alebo nie.
Budeme pracovať s prvým typom vstupu.

Deterministické konečnostavové automaty (DKA) a regulárne jazyky

- Abeceda je konečná množina symbolov.
- Reťazec nad abecedou Σ je konečná postupnosť symbolov z abecedy Σ.
- Dĺžka reťazca s, označená $|s|$, je celkový počet symbolov v s.
- Prázdny reťazec, označený ϵ, je reťazec bez symbolov.
- Ak s a t sú dva reťazce, tak ich konkatenácia (zreťazenie) je reťazec st.

DKA and regulárne jazyky

Definition

- Jazyk v abecede Σ je množina reťazcov nad abecedou Σ.
- Nech sú dané dva jazyky L_1 a L_2. Jazyk $L_1.L_2$, nazvaný konkatenácia jazykov L_1 a L_2, je $\{st|s \in L_1, t \in L_2\}$.
- Nech je daný jazyk L.
  Definujeme $L^0 = \{\epsilon\}$ a $L^n = L.L^{n-1}$ pre $n \geq 1$.
  Iterácia L, označená $L^\star$, je jazyk $L^\star = \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n$.
- Podobne pozitívna iterácia $L^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} L^n$. $\odot$

Definition

Deterministický konečný automat je 5-tica $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$:

- $Q \neq \emptyset$, konečná množina stavov automatu,
- Σ je vstupná abeceda (v našom prípade $\Sigma = \{0, 1\}$),
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ je prechodová funkcia,
- $q_0 \in Q$ je počiatočný stav automatu, a
- $F \subseteq Q$ je množina akceptujúcich stavov.

Zovšeobecnená prechodová funkcia automatu $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$ je definovaná takto:

- $\delta^*(q, \epsilon) = q$ pre $q \in Q$,
- $\delta^*(q, wa) = \delta(\delta^*(q, w), a)$ pre $q \in Q, w \in \Sigma^*, a \in \Sigma$. $\odot$

Je možné použiť neurónovú sieť namiesto DKA (akceptora)?

- Deterministicý konečnostavový automat (DKA) – regulárne jazyky.
- K DKA vieme skonštruovať neurónovú sieť, ktorá bude realizovať činnosť automatu.
- Nepoužijeme algoritmus na trénovanie váh, ale váhy a prahy neurónov vhodne nastavíme.
- Tiež nás zaujíma veľkosť neurónovej siete vzhľadom na počet stavov DKA.

Konštrukcia neurónovej siete k DKA

Nech je daný DKA $A = (Q, \Sigma, \delta, q0, F), \Sigma = \{0, 1\}$
Architektúra siete:

- Každý stav $q \in Q$ je reprezentovaný 2 neurónmi, označme ich $(q, 0)$ a $(q, 1)$
- V neurónovej sieti vytvoríme prepojenia tak, že v čase t neurón (q, i) bude aktivovaný vtedy a len vtedy, keď originálny automat A v čase t je v stave q a dostáva vstup i.
- K sieti týchto neurónov je potrebné pridať jeden výstupný neurón.

Teda celkový počet neurónov je $2 * m + 1$, ak $m = |Q|$

Nastavenie váh

- Pre ľubovoľné dva stavy q_j a q_k,

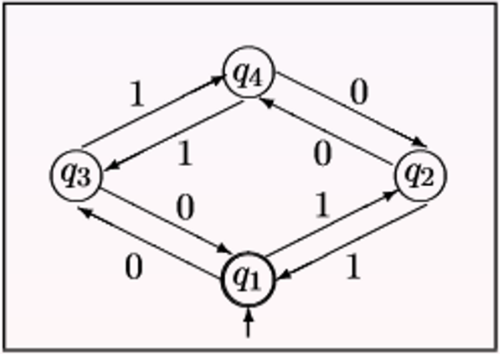
  $$w[(q_j, i), (q_k, 0)] = w[(q_j, i), (q_k, 1)] \in \{0, 1\},$$

  a rovná sa 1 $\Leftrightarrow$ keď v A je prechod zo stavu q_j do stavu q_k cez vstup i.
- Pre vstupné váhy platí, $w0(q, 0) = -1$ a $w0(q, 1) = +1$ pre všetky q.
- Pre výstupné váhy, $w[(q, i), 2m + 1] = \tau(q, i)$ (τ je výstupná funkcia).
- Všetky tu nezmienené váhy sú rovné 0.
- Prahy sú nastavené: $c(q, 1) = 2, c(q, 0) = 1$ a $c(2m + 1) = 1$.

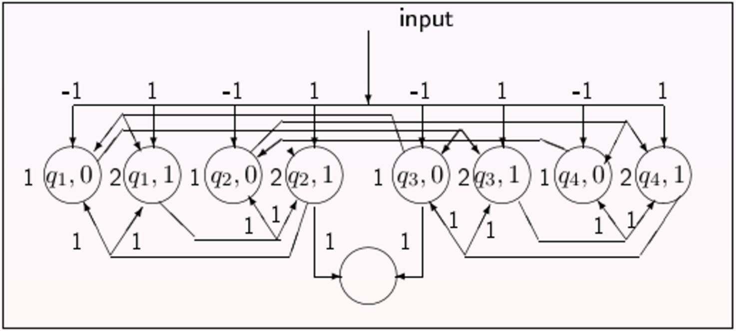
Je zrejmé, že ak v čase t = 0 presne jeden z neurónov $(q, i), q \in Q, i = 0, 1$, je aktívny (je potrebné sa riadiť prvým písmenom spracovávaného slova), tak v ľubovoľnom čase $t \geq 1$ v závislosti od vstupu práve jeden z neurónov bude aktívny a dynamika siete bude presne taká istá ako u DKA A.

Príklad

$A1 = (Q, \Sigma, \delta, q_1, q_1)$ je DKA, ktorý akceptuje všetky slová a len tie slová s párnym počtom núl a párnym počtom jednotiek.



Neurónová sieť simulujúca prácu automatu A1



Aktivačná funkcia neurónov je $F(x) = 1$, ak $x \geq 0$, inak $F(x) = 0$.

Table: Výpočet pre slovo 10101

$(q_1, 0)$	$(q_1, 1)$	$(q_2, 0)$	$(q_2, 1)$	$(q_3, 0)$	$(q_3, 1)$	$(q_4, 0)$	$(q_4, 1)$
0	1	0	0	0	0	0	0

Výstup: 0

Table: Výpočet pre slovo 10101

$(q_1, 0)$	$(q_1, 1)$	$(q_2, 0)$	$(q_2, 1)$	$(q_3, 0)$	$(q_3, 1)$	$(q_4, 0)$	$(q_4, 1)$
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0

Výstup: 0 0 0 1 0
Akceptuje slovo 1010

DKA realizovaný pomocou neurónovej siete

- Alon [1] - každý m-stavový deterministický konečný automat môže byť realizovaný pomocou diskrétnej neurónovej siete s $O(m^{\frac{3}{4}})$ neurónmi a aspoň $\Omega((m \log m)^{\frac{1}{3}})$ neurónov je nutných pre túto konštrukciu.
- Tieto hranice boli vylepšené: $O(m^{\frac{1}{2}})$ neurónov postačuje a neurónová sieť vyžaduje najviac $\Omega(m^{\frac{1}{2}})$ neurónov, keď hodnoty váh sú polynomiálne vzhľadom na veľkosť siete.
- Pripomíname výsledok z Hopcrofta and Ullmana: **Jazyk L je regulárny $\Leftrightarrow$ ak je rozpoznaný nejakým konečnostavovým automatom.**

Definition (Regulárne výrazy:)

Množina $\mathcal{RE}$ regulárnych výrazov nad abecedou $\Sigma = \{0, 1\}$ je minimálny jazyk nad abecedou $\{0, 1, \emptyset, \epsilon, +, ., \star, (,)\}$, ktorý spĺňa nasledujúce podmienky:

1. $\emptyset, \epsilon, 0, 1 \in \mathcal{RE}$
2. if $\alpha, \beta \in \mathcal{RE}$ then $(\alpha + \beta), (\alpha.\beta), \alpha^\star \in \mathcal{RE}$.

Množina $\mathcal{RL} = \{[\alpha] | \alpha \in \mathcal{RE}\}$ je množina regulárnych jazykov $[\alpha]$, ktoré sú vyjadrené regulárnym výrazom α nasledovne:

- $[\emptyset] = \emptyset$, $[\epsilon] = \{\epsilon\}$, $[0] = \{0\}$, $[1] = \{1\}$,
- ak $\alpha, \beta \in \mathcal{RE}$, tak $[\alpha + \beta] = [\alpha] \cup [\beta], [\alpha.\beta] = [\alpha].[\beta]$, $[\alpha^\star] = [\alpha]^\star$

Regulárny výraz α^+ zodpovedajúci $[\alpha]^+$ je definovaný výrazom $[\alpha^\star] = [\epsilon + \alpha^+]$. $\odot$

Neuromaty - neurónové akceptory jazykov

Sú známe nasledujúce tri výsledky [5]:

1. Ľubovoľný jazyk $L = L(\mathcal{N})$ rozpoznávaný neuromatom $\mathcal{N}$ je regulárny.
2. Pre každý regulárny jazyk L vyjadrený regulárnym výrazom $L[\alpha]$ existuje neuromat $\mathcal{N}$ veľkosti $O(|\alpha|)$, ktorý rozpoznáva jazyk L.
3. Existujú regulárne jazyky $L_n = [\alpha_n], n \geq 1$ také, že ľubovoľný neuromat $\mathcal{N}$, ktorý rozpoznáva jazyk $L_n = L(\mathcal{N})$ vyžaduje aspoň $\Omega(|\alpha_n|)$ neurónov.

Pre prvý typ vstupu definujeme neuromat - akceptor regulárnych jazykov.

Definition (Neuromat)

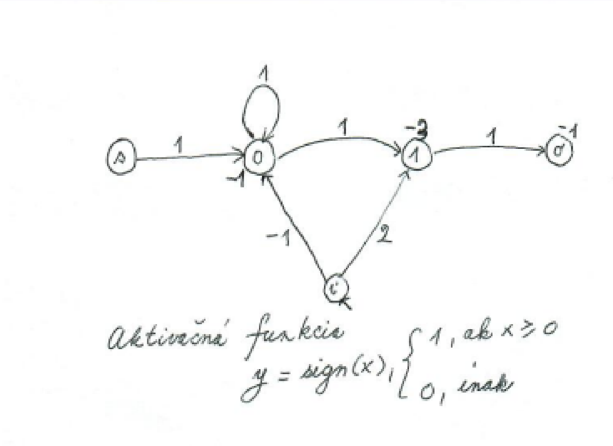
Neurónový akceptor *(skrátene, neuromat)* je 7-ica $\mathcal{N} = (V, inp, out, E, w, h, s_{init})$, kde

- V je množina neurónov obsahujúca aj vstupný $inp \in V$ a výstupný neurón $out \in V$,
- $E \subseteq V \times (V - inp)$ množina orientovaných prepojení (hrán),
- $w : E \longrightarrow Z$ (Z je množina celých čísel) je váhová funkcia (skrátene $w(< i, j >) = w_{ij}$),
- $h : V - \{inp\} \longrightarrow \{0, 1\}$ je prahová funkcia (skrátene $h(i) = h_i$), a
- $s_{init} : V - \{inp\} \longrightarrow \{0, 1\}$ je počiatočné nastavenie siete.

- Graf (V, E) sa nazýva **architektúra neuromatu** $\mathcal{N}$ a $n = \mid V \mid$ je veľkosť neuromatu.
- Počet bitov potrebných na reprezentáciu celého neuromatu (váh a prahov,...) sa nazýva **popisná zložitosť neuromatu**.

$\odot$

Príklad



Example

- $V = \{s, o, i, 0, 1\}$
- $inp = i$
- $out = o$
- $E = (s, 0), (0, 0), (0, 1), (1, o), (i, 0), (i, 1)$
- $w(s, 0) = 1, w(0, 0) = 1, w(0, 1) = 1, w(1, o) = 1, w(i, 0) = -1, w(i, 1) = 2$
- $(h(0) = -1, h(1) = -3, h(o) = -1$
- $sinit = (1, 0, 0, 0)$

Pripomíname výsledok, ktorý chceme potvrdiť

- Pre každý regulárny jazyk L vyjadrený regulárnym výrazom $L[\alpha]$ existuje neuromat $\mathcal{N}$ veľkosti $O(|\alpha|)$, ktorý rozpoznáva jazyk L.

Pre jazyk $L = [\alpha]$, skonštruujeme neuromat $\mathcal{N}_\alpha = (V, inp, out, E, w, h, s_{init}$ of size $O(|\alpha|)$ tak, ž $L = L(\mathcal{N}_\alpha)$.

Konštrukcia neuromatu

Šíma [5].

- Najprv vytvoríme architektúru (V, E) neuromatu $\mathcal{N}_\alpha$ rekurzívne vzhľadom na štruktúru regulárneho výrazu α.
- Na tento účel definujeme postupnosť grafov $(V_k, E_k), k = 0, \ldots, p,$, kde (V_0, E_0) má jediný vrchol odpovedajúci celému výrazu α, ktorý je rekurzívne rozdelený na kratšie regulárne podvýrazy tak, že (V_p, E_p) má vrcholy typu 0 or 1 podľa výrazu α.

1. $V_0 = \{s, \alpha, o\}, E_0 = \{[s, \alpha], [\alpha, o]\}$
2. Predpokladajme, že $V_k, E_k, 0 \leq k \; < p$ už bol skonštruovaný a $\beta \in V_k$ podvýraz v α rôzny od 0 a 1.
   Teda okrem prázdneho jazyka a prázdneho reťazca regulárny výraz β môže predstavovať zjednotenie, konkatenáciu alebo iteráciu podvýrazov v β.
3. Skonštruujeme nový graf (V_{k+1}, E_{k+1}).
   Odstránime vrchol β a pridáme nové vrcholy a dostaneme nový graf. Jeden z nových vrcholov je možné označiť ako β.

Substitúcie:

- β je $\emptyset$: $V_{k+1} = V_k - \{\beta\}$, $E_{k+1} = E_k - \{[x,\beta],[\beta,y] \in E_k\}$.
- β je ϵ: $V_{k+1} = V_k - \{\beta\}$, $E_{k+1} = (E_k - \{[x,\beta],[\beta,y] \in E_k\}) \cup \{[x,y] | [x,\beta],[\beta,y] \in E_k - \{[\beta,\beta]\}\}$.
- β má tvar $\beta+\gamma$: $V_{k+1} = V_k \cup \{\gamma\}$, $E_{k+1} = E_k \cup \{[x,\gamma],[\gamma,y] | [x,\beta],[\beta,y] \in E_k\} \cup \{[\gamma,\gamma] | [\beta,\beta] \in E_k\}$.
- β má tvar $\beta.\gamma$: $V_{k+1} = V_k \cup \{\gamma\}$, $E_{k+1} = (E_k - \{[\beta,y] \in E_k\}) \cup \{[\beta,\gamma]\} \cup \{[\gamma,y] | [\beta,y] \in E_k\}$.
- β má tvar β^+: $V_{k+1} = V_k, E_{k+1} = E_k \cup \{[\beta,\beta]\}$.

Konštrukcia je ukončená po $p = O(|\alpha|)$ krokoch, keď V_p obsahuje len podvýrazy 0 alebo 1. Definujeme architektúru neuromatu nasledovne:

$$V = V_p \cup \{inp\}, E = E_p \cup \{[inp, \beta] | \beta \in V_p - \{s, o\}\}. \quad (1)$$

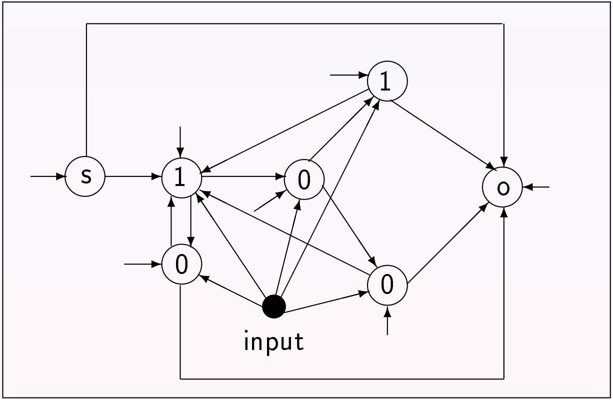
Pre $i \in V$ označíme $d(i) = |\{j \in V_p | [j, i] \in E\}|$.
Definujeme váhovú w a prahovú funkciu h:

- $i \in V$ is the neuron of the type 1: $w_{ij} = 1$ for $[j, i] \in E_p$ and $w_{i,inp} = d(i), h_i = d(i) + 1$.
- $i \in V$ is the neuron of the type 0: $w_{ij} = 1$ for $[j, i] \in E_p$ and $w_{i,inp} = -d(i), h_i = 1$.

- $s \in V$: $h_s = 1$.
- $o \in V$: $w_{o,j} = 1$ for $[j, o] \in E_p, h_o = 1$.
- Počiatočný stav je definovaný $s_0(i) = 0$ pre $i \in V_p - \{s\}$ a $s_0(s) = 1$.

Množina V obsahuje 3 špeciálne neuróny inp, s, o a ďalšie neuróny typu 1 or 0 – jeden pre každý podvýraz 1 alebo 0 v α; teda $|V| = O(|\alpha|)$. $\odot$

Neuromat pre jazyk $[(1(0+0(1+0)))^{\star}]$

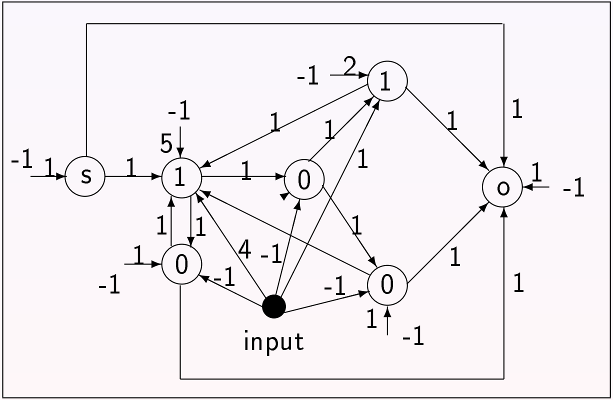


Výpočet váh a prahov

Pre $i \in V$ vypočítame $d(i) = |\{j \in V_p | [j, i] \in E\}|$.

Neurón	typ	d	prah	váhy zo vstupu
A	1	4	5	4
B	1	1	2	1
C	0	1	1	-1
D	0	1	1	-1
E	0	1	1	-1

Neuromat pre RE $[(1(0+0(1+0)))^{\star}]$ s váhami a prahmi



Tretí výsledok ukazuje dolné hranice počtu neurónov, ktoré sú v najhoršom prípade potrebné na rozpoznávanie regulárnych jazykov, ktoré sú vyjadrené regulárnymi výrazmi dĺžky n.
Z toho vyplýva, že vyššie uvedená konštrukcia neuromatu je optimálna. Dolné hranice by mala preukázať množina jazykov:

$$L_n = \Big(\sum_{i=0}^{n-3}(1(\epsilon+0))^i 10 + (1(\epsilon+0))^{n-1}(1+0)\Big)^* \qquad (2)$$

$$\Pi_k = \left[(1(\epsilon+0))^k\right], \quad P_n = \cup_{k=0}^{n-1}\Pi_k. \qquad (3)$$

Je zrejme, že $P_n, n \geq 1$ je množina prefixov jazyka L_n.

- Regulárny výraz, ktorý definuje jazyk P_n má v skutočnosti dĺžku $O(n^2)$.
  Je možné skonštruovať regulárny jazyk α_n lineárnej dĺžky vyjadrujúci ten istý jazyk L_n.
  Jazyky Π_n a P_n sú použité pri konštrukcii.
- Z toho vyplýva výsledok našich úvah a predpokladov, že každý neuromat $\mathcal{N}$ rozpoznávajúci jazyk L_n vyžaduje aspoň $\Omega(n)$ binárnych neurónov.

Diskusia

Siegelmann a Sontag [4] dokázali, že sa dajú simulovať všetky Turingove stroje rekurentnými neurónovými sieťami prvého rádu, to znamená siete konečnej veľkosti, ktoré majú prepojenia synchrónne pracujúcich neurónov.

Každý neurón aktualizuje svoj stav aplikáciou "sigmoidálnej" funkcie na lineárne kombinácie predchádzajúcich stavov všetkých neurónov. Teda je možné simulovať akýkoľvek multi-zásobníkový Turingov stroj v reálnom čase a existuje sieť s 886 neurónmi, ktorá počíta univerzálne parciálne rekurzívne funkcie.

- Alon, N., Dewdney, A. K., Teunis, J. O.: Efficient Simulation of Finite Automata by Neural Nets, Journal of ACM, Vol. 38, No. 2, April 1991, pp.495-514.
- Hassoun, M. H.: Fundamentals of artificial neural networks. MIT Press, Cambridge, 1995, pp. 511.
- Orponen, P.: Computational complexity of neural networks: A survey, NeuroCOLT Tech. Report Series, NC-TR-94-010, Royal Holloway University of London, 1994, pp. 20.
- Siegelmann, H. T., Sontag, E. D.: On the computational power of neural nets, Journal of computer and system sciences, Vol. 50, No. 1, 1995, p. 132-150.
- Šíma, J., Neruda, R.: Theoretical Questions on Neural Networks, MatfyzPress, Prague, 1996.