Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach

Prírodovedecká fakulta

Ústav Matematiky

f-chromatický index planárnych grafov

ŠVOČ 2009

Michal Dečo

vedúci práce:

doc.RNDr. Mirko Horňák CSc.

Košice, 2009

Abstrakt

V roku 1965 V.G. Vizing dokázal, že planárne grafy maximálneho stupňa aspoň 8 majú hranový chromatický index rovný svojmu maximálnemu stupňu. Obsahom tejto práce je dôkaz analogického tvrdenia pre prípad zovšeobecneného hranového ofarbenia grafu.

Obsah

1 Úvod **4**

2 Zovšeobecnenie hranového ofarbenia grafu **4**
2.1 f-kritické grafy 5

3 Planárne a rovinné grafy **6**

4 Metóda presúvania náboja **8**

5 Výsledoky **9**

6 Poďakovanie **16**

1 Úvod

Nech $\mathbf{V}$ je nekonečná množina. Pod pojmom graf budeme rozumieť usporiadanú dvojicu konečných množín $\langle V, E \rangle$, kde $V \subseteq \mathbf{V}$ a $E \subseteq [V]^2$. V ďalšom kvôli zjednodušeniu označovania a vyjadrovania sa bude dôležité, že vrcholy grafov, ktoré budeme uvažovať budú prvkami jednej nosnej množiny $\mathbf{V}$. Žiaden iný dôvod pre zavedenie množiny $\mathbf{V}$ nemáme.

2 Zovšeobecnenie hranového ofarbenia grafu

Pre ľubovoľný graf G zaveďme takéto označenie. Ak v je vrchol grafu G, tak položme

$$M_G(v) = \{e : e \in E(G) \wedge v \in e\}.$$

Prvkami množiny $M_G(v)$ sú práve hrany grafu G incidentné s vrcholom v.

Definícia 2.1. Nech je daný graf G, zobrazenie $f : \mathbf{V} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ a množina C. Zobrazenie $\varphi : E(G) \to C$ nazývame *f-ofarbenie grafu* G, ak pre každý vrchol $v \in V(G)$, a pre každú farbu $c \in \mathrm{Rng}(\varphi)$ platí

$$\left|M_G(v) \cap \varphi^{-1}(c)\right| \leq f(v).$$

Poznámka. V ďalšom budeme pod označením f vždy rozumieť zobrazenie vystupujúce v predchádzajúcej definícii.

Na rozdiel od klasického hranového farbenia, kde pri jednom vrchole pripúšťame nanajvýš ak jeden výskyt ľubovoľnej farby, tak pri f-ofarbení je toto obmedzenie dané zobrazením f. Ľahko si môžme všimnúť, že predošlá definícia pokrýva aj klasické hranové farbenie, stačí za f zobrať zobrazenie konštantne rovné 1.

Všimnime si však, že v definícii uvažujeme zobrazenie f definované na celej množine $\mathbf{V}$, pričom skutočnosť, či nejaké zobrazenie φ je f-ofarbením grafu G nezávisí od toho, ako je zobrazenie f definované mimo množiny $V(G)$. Zato sme sa však vyhli závislosti medzi zobrazením f a grafom G. Toto sa prejaví ako dôležité neskôr.

Na druhej strane, medzi nevýhody takéhoto prístupu možno zaradiť situáciu, kedy máme dva izomorfné grafy G a H pri jednom zobrazení f, avšak z dôvodu rôznosti množín $V(G)$ a $V(H)$ existuje f-ofarbenie grafu G, ktoré však nie je f-ofarbením grafu H.

Ak interpretujeme stupeň vrchola v ako počet farieb potrebných na ofarbenie hrán incidentných s vrcholom v v grafe G, tak podobne môžeme pri danom grafe G a zobrazení f chápať číslo $\left\lceil \frac{\deg_G(v)}{f(v)} \right\rceil$. V súlade s týmto položme

$$\Delta_f(G) = \max_{v \in V(G)} \left\{ \left\lceil \frac{\deg_G(v)}{f(v)} \right\rceil \right\}.$$

Minimálny počet farieb potrebný na ofarbenie grafu G pri klasickom hranovom farbení nazývame chromatický index grafu G a označujeme $\chi'(G)$. Analogicky pri danom zobrazení f definujeme f-chromatický index grafu G.

Definícia 2.2. Ak je daný graf G a zobrazenie $f : \mathbf{V} \to \mathbb{N} \setminus 0$, tak *$f$-chromatický index* grafu G nazývame číslo

$$\chi'_f(G) = \min\{n : n \in \mathbb{N} \wedge (\exists\varphi)\,(\varphi \text{ je } f\text{-ofarbenie grafu } G \wedge |\operatorname{Rng}(\varphi)| = n)\}.$$

Vizing [1] ukázal, že pre každý graf G platí $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$. Zovšeobecnenú verziu tohoto tvrdenia pre prípad f-ofarbení dokázali Hakimi a Kariv [2].

Veta 2.1. *Ak je daný graf G a zobrazenie $f : \mathbf{V} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tak*

$$\Delta_f(G) \leq \chi'_f(G) \leq \Delta_f(G) + 1.$$

Vďaka predošlej vete môžeme pri danom pevnom zobrazení f rozložiť triedu všetkých grafov na dve disjunktné podtriedy.

$$C_f1 = \{G : G \text{ je graf } \wedge \chi'_f(G) = \Delta_f(G)\},$$
$$C_f2 = \{G : G \text{ je graf } \wedge \chi'_f(G) = \Delta_f(G) + 1\}.$$

Toto by nebolo možné, keby zobrazenie f nebolo predom definované pre všetky nami uvažované grafy. Jedným zo spôsobov, ako to je možné dosiahnuť, je naša formulácia definície 2.1.

V článku [3] Zhang a Liu ukázali, že pre kompletný graf K_n platí, ak k a n sú nepárne prirodzené čísla, $k|(n-1)$ a $f(v) = k$, pre každý vrchol $v \in V(K_n)$, tak $K_n \in C_f2$. Inak $K_n \in C_f1$. Takže triedy C_f1 a C_f2 sú neprázdne. Spomedzi grafov z C_f2 hrajú význačnú úlohu takzvané f-kritické grafy.

2.1 f-kritické grafy

V tejto časti predstavíme f-kritické grafy a niektoré ich vlastnosti, ktoré budeme potrebovať neskôr. Pristúpme teda k úvodnej definícii.

Definícia 2.3. Súvislý graf G nazývame *f-kritický*, ak $G \in C_f2$ a pre ľubovoľnú hranu $e \in E(G)$ platí $\chi'_f(G - e) < \chi'_f(G)$, kde $G - e$ je graf, ktorý vznikne z grafu G odobratím hrany e.

Poznámka. V f-kritickom grafe nie je vrchol, ktorého stupeň by bol 1. Lebo keby tam taký bol, tak odobratím príslušnej hrany získame graf z C_f1, ktorý už ľahko dofarbíme bez pridania ďalšej farby. To by bol však spor.

Z definície vidíme, že f-kritické grafy pri danom pevnom Δ_f sú minimálne v triede

$$\{G : G \in C_f2 \wedge \Delta_f(G) = \Delta_f\}$$

vzhľadom na usporiadanie dané reláciu byť podgrafom. Toto pozorovanie možno sformulovať ako všeobecnejšie tvrdenie.

Veta 2.2. *[4] Ak G je graf z C_f2, tak pre každé $k \in \{2, \ldots, \Delta_f(G)\}$ existuje podgraf H grafu G, ktorý je f-kritický s $\Delta_f(H) = k$.*

Vďaka tejto skutočnosti sa v mnohých prípadoch pri dokazovaní tvrdení o grafoch z C_f2 môžeme obmedziť na f-kritické grafy.

Výnimočnosť f-kritických grafov súvisí okrem iného so spôsobom, ako možno takéto grafy skúmať. Pretože po odobratí hrany e z f-kritického grafu G môžeme zvyšok ofarbiť pomocou $\Delta_f(G)$ farieb. Avšak celý graf G pomocou $\Delta_f(G)$ farieb ofarbiť nemožno, čo si vynucuje pomerne striktné podmienky pre okolie hrany e, pričom túto procedúru môžeme vykonať s ľubovoľnou hranou grafu G. Táto myšlienka sa využíva pri dôkaze nasledujúcej vety.

Veta 2.3. *[4] Ak G je f-kritický graf, tak pre ľubovoľné dva susedné vrcholy $u, v \in V(G)$ platí*

$$(f(u) + f(v) - 1)\Delta_f(G) + 2 \leq \deg_G(u) + \deg_G(v).$$

Dôsledok 2.3.1. *[4] Ak G je f-kritický graf, tak pre ľubovoľný vrchol $v \in V(G)$ platí*

$$\Delta_f(G)(f(v) - 1) + 2 \leq \deg_G(v).$$

V f-kritickom grafe G sú početne zastúpené také vrcholy $v \in V(G)$, pre ktoré platí $\deg_G(v) = \Delta_f(G)f(v)$. Takéto vrcholy budeme nazývať *f-maximálne* vrcholy. Že je to naozaj tak, vyplýva z nasledujúcej lemy.

Lema 2.4. *Nech G je f-kritický graf a nech $u, v \in V(G)$ sú susedné vrcholy v grafe G. Potom*

(1) ak $\deg_G(v) < \Delta_f(G)f(v)$, tak u má aspoň $f(u)(\Delta_f(G)f(v) - \deg_G(v) + 1)$ f-maximálnych susedov,

(2) ak $\deg_G(v) = \Delta_f(G)f(v)$, tak u má aspoň $f(u) + 1$ f-maximálnych susedov.

3 Planárne a rovinné grafy

Definícia 3.1. Množinu $A \subseteq \mathbb{E}_2$ nazývame *oblúk*, ak existuje homeomorfizmus h intervalu $\langle 0, 1\rangle$ na množinu A. Body $h(0)$ a $h(1)$ nazývame *koncové body* oblúka A. Množinu $\mathring{A} = A \setminus \{h(0), h(1)\}$ nazývame *vnútro* oblúka A.

Na tomto mieste by sa patrilo ukázať, že koncové body tak ako boli definované, boli definované korektne. A teda, že nezávisia od voľby homeomorfizmu h.

Predpokladajme teraz, že h a g sú dva homeomorfizmy intervalu $\langle 0, 1\rangle$ na množinu A, pre ktoré je $\{h(0), h(1)\} \neq \{g(0), g(1)\}$. Bez ujmy na všeobecnosti môžme predpokladať, že $h(0) \notin \{g(0), g(1)\}$.

Keďže zobrazenia h a g sú homeomorfizmy, tak aj zobrazenie $h \circ g^{-1}$ je homeomorfizmus intervalu $\langle 0, 1\rangle$ samého na seba. Navyše platí

$$y = \left(h \circ g^{-1}\right)(0) = g^{-1}\left(h(0)\right) \in (0, 1),$$

lebo zobrazenie g je bijekcia a $h(0) \notin \{g(0), g(1)\}$. Zoberme teraz dva prvky $x \in (0, y)$ a $z \in (y, 1)$. Pre ne existujú $a, b \in \langle 0, 1\rangle$ také, že

$$\left(h \circ g^{-1}\right)(a) = x,$$
$$\left(h \circ g^{-1}\right)(b) = z.$$

Opäť BUNV predpokladajme, že $a < b$. Zobrazenie $h \circ g^{-1}$ je spojité na intervale $\langle a, b\rangle$ a $x < y < z$, preto existuje $c \in \langle a, b\rangle$, pre ktoré je $\left(h \circ g^{-1}\right)(c) = y$. Avšak $0 < a \leq c$ a to je v spore s prostotou zobrazenie $h \circ g^{-1}$.

Definícia 3.2. Usporiadnú dvojicu konečných množín $\langle V, E\rangle$ nazývame *rovinný graf*, ak platí

a) $V \subseteq \mathbb{E}_2$,

b) každá hrana je oblúk, ktorého koncové body sú vrcholy,

c) ak dve hrany majú tie isté koncové body, tak sú rovnaké,

d) vnútro hrany neobsahuje žiadny vrchol ani bod patriaci inej hrane.

Definícia 3.3. Graf G nazývame *planárny graf*, ak existuje rovinný graf H, ktorý je izomorfný s grafom G.

Ak G je rovinný graf, tak množina $\mathbb{E}_2 \setminus (V \cup \bigcup E)$ je otvorená. Jej maximálne oblasti nazývame *steny* grafu G. Množinu stien grafu G označujeme ako $F(G)$. Budeme tiež hovoriť, že hrana $e \in E(G)$ je *incidentná* so stenou $s \in F(G)$, ak $e \subseteq Cl(s)$, kde $Cl(s)$ je uzáver steny s.

Lema 3.1. *[5] Nech G je rovinný graf a e nech je hrana grafu G.*

(i) ak s je stena grafu G, tak buď $e \subseteq Cl(s)$ alebo $\mathring{e} \cap Cl(s) = \emptyset$,

(ii) ak hrana e leží na kružnici v grafe G, tak existujú práve dve steny incidentné s hranou e,

(iii) ak hrana e neleží na žiadnej kružnici v grafe G, tak existuje práve jedna stena incidentná s hranou e.

Rozložme množinu hrán grafu G na takéto dve disjunktné podmnožiny. Položme

$$E_1(G) = \{e : e \in E(G) \wedge (\exists! s \in F(G)) e \subseteq Cl(s)\},$$
$$E_2(G) = E(G) \setminus E_1(G).$$

Ak s je stena v rovinnom grafe G, tak označme množinu hrán grafu G incidentných so stenou s ako $M_G(s)$. Položme

$$\deg_G(s) = 2 \mid E_1(G) \cap M_G(s) \mid + \mid E_2(G) \cap M_G(s) \mid .$$

Číslo $\deg_G(s)$ nazývame *stupeň steny* s v grafe G.

Lema 3.2. *Ak G je rovinný graf, tak*

$$\sum_{s \in F(G)} \deg_G(s) = 2 \mid E(G) \mid .$$

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou vzhľadom k počtu hrán grafu G.

1. Ak $\mid E(G) \mid = 0$, tak $F(G) = \{s\}$ a $\deg_G(s) = 0$. Preto

$$\sum_{s \in F(G)} \deg_G(s) = 0 = 2 \mid E(G) \mid .$$

2. Predpokladajme, že $0 <\mid E(G) \mid$ a pre všetky rovinné grafy H, pre ktoré je $\mid E(H) \mid < \mid E(G) \mid$ lema platí.

Nech $e \in E(G)$, je ľubovoľná pevná hrana grafu G. Ak $e \in E_1(G)$, tak nech $\tilde{s} \in F(G)$ je jediná stena v grafe G, pre ktorú je $e \subseteq Cl(\tilde{s})$. Potom

$$\begin{aligned} F(G-e) &= (F(G) \setminus \{\tilde{s}\}) \cup \{int\left(Cl(\tilde{s} \cup \mathring{e})\right)\}^1, \\ \deg_G(\tilde{s}) &= 2 + \deg_{G-e}\left(int\left(Cl(\tilde{s} \cup \mathring{e})\right)\right). \end{aligned}$$

Preto aj

$$\sum_{s \in F(G)} \deg_G(s) = \deg_G(\tilde{s}) + \sum_{s \in F(G)\setminus\{\tilde{s}\}} \deg_G(s) = 2 + \sum_{s \in F(G-e)} \deg_{G-e}(s) \overset{\text{IP}}{=}$$

$$\overset{\text{IP}}{=} 2 + 2 \mid E(G-e) \mid = 2(1 + \mid E(G-e) \mid) = 2 \mid E(G) \mid.$$

V prípade, keď $e \in E_2(G)$ označme $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2 \in F(G)$ jediné dve rôzne steny, pre ktoré je $e \subseteq Cl(\tilde{s}_1) \cap Cl(\tilde{s}_2)$. Potom

$$\begin{aligned} F(G-e) &= (F(G) \setminus \{\tilde{s}_1, \tilde{s}_2\}) \cup \{int(\tilde{s}_1 \cup \mathring{e} \cup \tilde{s}_2)\}, \\ \deg_G(\tilde{s}_1) + \deg_G(\tilde{s}_2) &= \deg_{G-e}(int(\tilde{s}_1 \cup \mathring{e} \cup \tilde{s}_2)) + 2. \end{aligned}$$

Preto

$$\sum_{s \in F(G)} \deg_G(s) = \deg_G(\tilde{s}_1) + \deg_G(\tilde{s}_2) + \sum_{s \in F(G)\setminus\{\tilde{s}_1, \tilde{s}_2\}} \deg_G(s) =$$

$$= 2 + \sum_{s \in F(G-e)} \deg_{G-e}(s) \overset{\text{IP}}{=} 2 + 2 \mid E(G-e) \mid = 2(1 + \mid E(G-e) \mid) = 2 \mid E(G) \mid.$$

□

Nakoniec tejto časti vyslovíme vetu známu ako Eulerova formula.

Veta 3.3. *Ak G je súvislý rovinný graf, tak*

$$\mid V(G) \mid - \mid E(G) \mid + \mid F(G) \mid = 2.$$

V tomto momente máme k dispozícii všetky poznatky potrebné na vysvetlenie metódy presúvania náboja, ktorá bude naším hlavným nástrojom pri dôkaze vety ohlásenej v abstrakte.

4 Metóda presúvania náboja

Metóda, ktorú si v tejto časti predstavíme, je priamym dôsledkom Eulerovej formuly. Jej použitie sa preto výhradne týka dôkazov tvrdení o rovinných a planárnych grafoch. Majme teda rovinný graf G. Podľa Vety 3.3 preň platí

$$\mid V(G) \mid - \mid E(G) \mid + \mid F(G) \mid = 2.$$

Postupným odvodzovaním, dostaneme z Eulerovej formuly požadovaný tvar.

$$6 \mid V(G) \mid -6 \mid E(G) \mid +6 \mid F(G) \mid = 12,$$

[1] $int(A)$ je najväčšia otvorená množina, ktorá je podmnožinou množiny A.

$$(6 \mid V(G) \mid -2 \mid E(G) \mid) + 2\,(3 \mid F(G) \mid -2 \mid E(G) \mid) = 12.$$

Po dosadení dostávame

$$\left(\sum_{v \in V(G)} 6 - \sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) \right) + 2 \left(\sum_{s \in F(G)} 3 - \sum_{s \in F(G)} \deg_G(s) \right) = 12,$$

$$\sum_{v \in V(G)} (6 - \deg_G(v)) + 2 \cdot \sum_{s \in F(G)} (3 - \deg_G(s)) = 12. \tag{1}$$

Definujeme zobrazenie $ch : V(G) \cup F(G) \to \mathbb{Z}$ takto

$$ch(x) = \begin{cases} 6 - \deg_G(x), & \text{pre } x \in V(G), \\ 3 - \deg_G(x), & \text{pre } x \in F(G). \end{cases}$$

Zobrazenie ch udáva počiatočný náboj vrcholov a stien v rovinnom grafe G. Po dosadení do výrazu (1) dostaneme

$$\sum_{v \in V(G)} ch(v) + 2 \cdot \sum_{s \in F(G)} ch(s) = 12. \tag{2}$$

Ak teraz chceme ukázať o nejakom grafe, že nie je rovinný, tak môžeme postupovať sporom. Budeme predpokladať, že dotyčný graf je rovinný a teda môžeme pre jeho vrcholy a steny definovať zobrazenie ch, pričom platí rovnosť (2).

Všimnime si, že vrcholy veľkého stupňa(> 6) majú naboj záporný, vrcholy malého stupňa(≤ 5) majú náboj kladný a náboj každej steny je nekladný(až na jednu výnimku, K_2). Cieľom je lokálne popresúvať časť náboja medzi vrcholmi a stenami tak, aby výsledný náboj každého vrchola a každej steny bol nekladný. To bude spor s rovnosťou (2).

5 Výsledoky

V ďalšom predpokladajme, že G je f-kritický graf s $\Delta_f(G) = 8 = \Delta$.

Lema 5.1. *Ak $uv \in E(G)$ a $\deg_G(x) = \Delta(f(x) - 1) + q_x$, pre $x \in \{u, v\}$, tak $\Delta + 2 \leq q_u + q_v$.*

Dôkaz. Podľa Vety 2.3 pre susedné vrcholy v f-kritickom grafe platí

$$\Delta(f(u) + f(v) - 1) + 2 \leq \deg_G(u) + \deg_G(v).$$

Odtiaľ

$$\Delta + 2 \leq \underbrace{\deg_G(u) - \Delta(f(u) - 1)}_{q_u} + \underbrace{\deg_G(v) - \Delta(f(v) - 1)}_{q_v} = q_u + q_v.$$

□

Poznámka. Označenie q_v zavedené v predošlej leme budeme používať aj ďalej.

Definujme zobrazenie $\eta : V(G) \to \mathbb{Z}$ nasledovne:

$$\eta(v) = \begin{cases} 0, & 6 < \deg_G(v), \\ 6 - \deg_G(v), & \deg_G(v) \leq 6. \end{cases}$$

Všimnime si, že zobrazenie η sa pre vrcholy stupňa nanajvýš ak 6 zhoduje s nábojovou funkciou ch. Čím je hodnota $\eta(v)$ väčšia, tým viac záporného náboja je potrebné presunúť na vrchol v, aby hodnota novej nábojovej funkcie vo vrchole v bola nekladná.

Pre každý vrchol $u \in V(G)$ tiež označme

$$m_u = \min\{\deg_G(v) : v \in N_G(u)\},$$

$${}^{q}N_G(u) = \{v : v \in N_G(u) \wedge \deg_G(v) = \Delta(f(v) - 1) + q\}, \text{ pre } q = 2, \ldots, \Delta.$$

Poznámka. Stupeň každého vrchola v f-kritickom grafe je aspoň 2, preto aj $2 \leq m_u$, pre ľubovoľný vrchol u v f-kritickom grafe.

Lema 5.2. *Ak u je vrchol v grafe G, pre ktorý existuje vrchol $v \in N_G(u)$ s $q_v \leq 7$, tak*

$$f(u)(\Delta - q_v + 1) \leq \left|{}^{\Delta}N_G(u)\right|.$$

Dôkaz. Ak si uvedomíme, že množina ${}^{\Delta}N_G(u)$ obsahuje práve f-maximálnych susedov vrchola u, tak tvrdenie vyplýva priamo z Lemy 2.4.

$$\left|{}^{\Delta}N_G(u)\right| \geq f(u)\left(\Delta f(v) - \underbrace{(\Delta(f(v) - 1) + q_v)}_{\deg_G(v)} + 1\right) = f(u)(\Delta - q_v + 1)$$

□

Dôsledok 5.2.1. *Ak u je vrchol v grafe G, pre ktorý je $m_u \leq 5$, tak*

$$f(u)(\Delta - m_u + 1) \leq \left|{}^{\Delta}N_G(u)\right|.$$

Nakoniec definujme zobrazenie $g(u) : V(G) \to \mathbb{Q}$ takto

$$g(u) = \begin{cases} \frac{6 - \deg_G(u)}{\sum\limits_{t \in N_G(u)} \eta(t)}, & \text{ak } 6 < \deg_G(u) \wedge m_u \leq 5, \\ 0, & \text{ak } \deg_G(u) \leq 6 \vee 5 < m_u. \end{cases}$$

Zobrazenie g priradí hodnotu 0 tým vrcholom, ktoré buď nemajú suseda stupňa menšieho ako 6, a teda nie je potrebné aby svojim susedom posielali nejaký záporný náboj, alebo sú sami stupňa príliš nízkeho(≤ 6), aby mali vôbec čo posielať.

Naopak zobrazenie g priradí vrcholu u, ktorý má pôvodný náboj záporný a súčasne má suseda, ktorý potrebuje nejakú nábojovú dotáciu, hodnotu

$$\frac{6 - \deg_G(u)}{\sum\limits_{t \in N_G(u)} \eta(t)}.$$

Výraz vyjadruje akúsi jednotku náboja, ktorá je k dispozícii pri vrchole u. Koľko týchto jednotiek presunieme na susedný vrchol v bude závisieť od hodnoty $\eta(v)$.

Lema 5.3. *Ak $u \in V(G)$, $m_u \leq 5$ a $\deg_G(u) = \Delta(f(u)-1)+q$, kde $7 \leq q$, tak*

$$g(u) \leq \frac{6-q}{(6-m_u)(q-(\Delta - m_u + 1))}.$$

Dôkaz. Vzhľadom na predpoklady Lemy platí:

$$\sum_{t \in N_G(u)} \eta(t) = \sum_{t \in N_G(u) \setminus \Delta N_G(u)} \eta(t) \leq \sum_{t \in N_G(u) \setminus^{\Delta} N_G(u)} (6-m_u) =$$

$$= (6-m_u)\left|N_G(u) \setminus \Delta N_G(u)\right| = (6-m_u)\left(\deg_G(u) - \left|{}^{\Delta}N_G(u)\right|\right) \leq$$

$$\leq (6-m_u)(\deg_G(u) - f(u)(\Delta - m_u + 1)).$$

Preto

$$g(u) = \frac{6-\deg_G(u)}{\sum\limits_{t \in N_G(u)} \eta(t)} \leq \frac{6-\deg_G(u)}{(6-m_u)\left|N_G(u) \setminus^{\Delta} N_G(u)\right|} \leq$$

$$\leq \frac{6-\deg_G(u)}{(6-m_u)(\deg_G(u) - f(u)(\Delta - m_u + 1))} =$$

$$= \frac{6-q-\Delta(f(u)-1)}{(6-m_u)(q-(\Delta-m_u+1)) + (6-m_u)(m_u-1)(f(u)-1)}. \qquad (3)$$

Keďže predpokladáme $m_u \leq 5$, tak

$$0 < 6 - m_u,$$
$$0 < \left|N_G(u) \setminus^{\Delta} N_G(u)\right| \leq (\deg_G(u) - f(u)(\Delta - m_u + 1)),$$

preto menovateľ vo výraze (3) je nenulový a výraz (3) definovaný.

Uvážme teraz funkciu $\frac{a+bx}{c+dx}$, pre $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ definovanú na intervale $\langle 0, \infty)$.

$$\left(\frac{a+bx}{c+dx}\right)' = \frac{b(c+dx)-(a+bx)d}{(c+dx)^2} = \frac{bc-ad}{(c+dx)^2}$$

Funkcia $\frac{a+bx}{c+dx}$ je nerastúca práve vtedy, keď $bc - ad \leq 0$. Všimnime si výraz (3). Ak označíme

$$\begin{aligned} a &= 6-q, \\ b &= -\Delta, \\ c &= (6-m_u)(q-(\Delta-m_u+1)), \\ d &= (6-m_u)(m_u-1), \end{aligned}$$

potom postupnosť s $f(u)-1$ členom (3) je nerastúca práve vtedy, keď

$$-\Delta(6-m_u)(q-(\Delta-m_u+1)) - (6-q)(6-m_u)(m_u-1) \leq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$-\Delta(q-(\Delta-m_u+1)) - (6-q)(m_u-1) \leq 0.$$

Ak $q = 7$, tak

$$-\Delta(q - (\Delta - m_u + 1)) - (6 - q)(m_u - 1) =$$

$$= -\Delta(m_u - 2) + (m_u - 1) = (1 - \Delta)m_u + 15 \leq -7.3 + 15 < 0.$$

Ak $q = 8$, tak

$$-\Delta(q - (\Delta - m_u + 1)) - (6 - q)(m_u - 1) =$$

$$-\Delta(m_u - 1) + 2(m_u - 1) = -6(m_u - 1) < 0.$$

Ukázali sme, že postupnosť s $f(u) - 1$ členom (3) je nerastúca, takže platí

$$g(u) \leq \frac{6 - q}{(6 - m_u)(q - (\Delta - m_u + 1))}.$$

$\square$

Dôsledok 5.3.1. *Ak* $u \in V(G)$, $m_u \leq 5$ *a* $\deg_G(u) = \Delta(f(u)-1)+q$, *kde* $7 \leq q$, *tak*

1. *ak* $m_u = 2$, *tak*
   ak $q = 8$, *tak* $g(u) \leq -\frac{1}{2}$,
2. *ak* $m_u = 3$, *tak*
   ak $q = 7$, *tak* $g(u) \leq -\frac{1}{3}$,
   ak $q = 8$, *tak* $g(u) \leq -\frac{1}{3}$,
3. *ak* $4 \leq m_u$, *tak*
   ak $q = 7$, *tak* $g(u) \leq -\frac{1}{4}$,
   ak $q = 8$, *tak* $g(u) \leq -\frac{1}{3}$,

V ďalšom budeme skúmať zobrazenie $\lambda : V(G) \to \mathbb{Q}$ definované nasledujúcim vzťahom:

$$\lambda(v) = \eta(v)\left(1 + \sum_{u \in N_G(v)} g(u)\right).$$

Zobrazenie λ bude práve modifikáciou nábojovej funkcie *ch*. V prípade vrcholov stupňa aspoň 6, bude jeho hodnota rovná 0. Pre vrcholy v stupňa nanajvýš ak 5 hodnota zobrazenia $\eta(v)$ charakterizuje pôvodný náboj vrchola v a hodnota výrazu

$$\eta(v) \cdot \sum_{u \in N_G(v)} g(u)$$

udáva množstvo náboja, ktoré presunieme zo susedných vrcholov na vrchol v.

Lema 5.4.

$$\max_{v \in V(G)} \lambda(v) \leq 0.$$

Dôkaz. V prípade, keď $6 \leq \deg_G(v)$ je $\eta(v) = 0$. Teda aj $\lambda(v) = 0$. Preto predpokladajme, že $\deg_G(v) \leq 5$. Navyše zobrazenie η nadobúda iba nezáporné hodnoty, takže sa môžme obmedziť iba skúmanie hodnôt výrazu

$$1 + \sum_{u \in N_G(v)} g(u).$$

Rozlíšme zvyšné štyri prípady. Pri odhadoch budeme využívať dôsledok 5.3.1 a skutočnosť, že zobrazenie g nadobúda iba nekladné hodnoty. Rozklady množiny $N_G(v)$ budeme robiť v súlade s Lemou 5.1. Poznamenajme ešte, že každý vrchol v f-kritickom grafe má aspoň dvoch f-maximálnych susedov.

1. Ak $\deg_G(v) = 2$, tak

$$\sum_{u \in N_G(v)} g(u) = \sum_{u \in {}^{\triangle}N_G(v)} g(u) \leq \sum_{u \in {}^{\triangle}N_G(v)} \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1.$$

2. Ak $\deg_G(v) = 3$, tak

$$\sum_{u \in N_G(v)} g(u) = \sum_{u \in {}^{7}N_G(v)} g(u) + \sum_{u \in {}^{\triangle}N_G(v)} g(u) \leq$$

$$\leq \sum_{u \in {}^{7}N_G(v)} \left(-\frac{1}{3}\right) + \sum_{u \in {}^{\triangle}N_G(v)} \left(-\frac{1}{3}\right) = \sum_{u \in N_G(v)} \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} \cdot 3 = -1.$$

3. Ak $\deg_G(v) = 4$, tak

$$\sum_{u \in N_G(v)} g(u) = \sum_{u \in {}^{6}N_G(v)} g(u) + \sum_{u \in {}^{7}N_G(v)} g(u) + \sum_{u \in {}^{\triangle}N_G(v)} g(u).$$

   Ak ${}^{6}N_G(v) \neq \emptyset$, tak podľa Lemy 5.2 platí $3 \leq \left|{}^{\triangle}N_G(v)\right|$, preto

$$\sum_{u \in N_G(v)} g(u) \leq \sum_{u \in {}^{\triangle}N_G(v)} g(u) \leq \sum_{u \in {}^{\triangle}N_G(v)} \left(-\frac{1}{3}\right) \leq -\frac{1}{3} \cdot 3 = -1.$$

   Ak však ${}^{6}N_G(v) = \emptyset$, tak

$$\sum_{u \in N_G(v)} g(u) = \sum_{u \in {}^{7}N_G(v)} g(u) + \sum_{u \in {}^{\triangle}N_G(v)} g(u) \leq$$

$$\leq \sum_{u \in {}^{7}N_G(v)} \left(-\frac{1}{4}\right) + \sum_{u \in {}^{\triangle}N_G(v)} \left(-\frac{1}{3}\right) \leq \sum_{u \in N_G(v)} \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4} \cdot 4 = -1.$$

4. Ak $\deg_G(v) = 5$, tak

$$\sum_{u \in N_G(v)} g(u) = \sum_{u \in {}^{5}N_G(v)} g(u) + \sum_{u \in {}^{6}N_G(v)} g(u) + \sum_{u \in {}^{7}N_G(v)} g(u) + \sum_{u \in {}^{\triangle}N_G(v)} g(u).$$

   Ak ${}^{5}N_G(v) \neq \emptyset$, tak podľa Lemy 5.2 platí $4 \leq \left|{}^{\triangle}N_G(v)\right|$, preto

$$\sum_{u \in N_G(v)} g(u) \leq \sum_{u \in {}^{\triangle}N_G(v)} g(u) \leq \sum_{u \in {}^{\triangle}N_G(v)} \left(-\frac{1}{3}\right) \leq -\frac{1}{3} \cdot 4 < -1.$$

Ak ${}^{5}N_G(v) = \emptyset$ a ${}^{6}N_G(v) \neq \emptyset$, tak platí $3 \leq \left|{}^{\Delta}N_G(v)\right|$, preto

$$\sum_{u \in N_G(v)} g(u) \leq \sum_{u \in {}^{\Delta}N_G(v)} g(u) \leq \sum_{u \in {}^{\Delta}N_G(v)} \left(-\frac{1}{3}\right) \leq -\frac{1}{3} \cdot 3 = -1.$$

Ak však ${}^{5}N_G(v) = \emptyset$ a ${}^{6}N_G(v) = \emptyset$, tak

$$\sum_{u \in N_G(v)} g(u) = \sum_{u \in {}^{7}N_G(v)} g(u) + \sum_{u \in {}^{\Delta}N_G(v)} g(u) \leq$$

$$\leq \sum_{u \in {}^{7}N_G(v)} \left(-\frac{1}{4}\right) + \sum_{u \in {}^{\Delta}N_G(v)} \left(-\frac{1}{3}\right) \leq \sum_{u \in N_G(v)} \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4} \cdot 5 < -1.$$

Ukázali sme teda, že pre vrchol v so stupňom $\deg_G(v) \leq 5$ platí

$$\sum_{u \in N_G(v)} g(u) \leq -1,$$

preto

$$\lambda(v) = \eta(v) \left(1 + \sum_{u \in N_G(v)} g(u)\right) \leq 0.$$

□

V predošlej Leme sme ukázali, že nová nábojová funkcia λ nadobúda iba nekladné hodnoty. Ostáva nám ešte ukázať, že sme nezmenšili celkový náboj vrcholov grafu G.

Lema 5.5.

$$\sum_{v \in V(G)} (6 - \deg_G(v)) \leq \sum_{v \in V(G)} \lambda(v).$$

Dôkaz. Položme $V_i = \{v : v \in V(G) \wedge \deg_G(v) = i\}$, pre $i \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

$$\sum_{v \in V(G)} \lambda(v) = \sum_{v \in V(G)} \eta(v) \left(1 + \sum_{u \in N_G(v)} g(u)\right) =$$

$$= \sum_{v \in V(G)} \eta(v) + \sum_{v \in V(G)} \left(\eta(v) \sum_{u \in N_G(v)} g(u)\right) =$$

$$= \sum_{v \in V(G)} \eta(v) + \sum_{v \in V(G)} \sum_{u \in N_G(v)} \eta(v) g(u) =$$

$$= \sum_{v \in V(G)} \eta(v) + \sum_{\{u,v\} \in E(G)} [\eta(v) g(u) + \eta(u) g(v)] =$$

$$= \sum_{v \in V(G)} \eta(v) + \sum_{v \in V(G)} \sum_{u \in N_G(v)} \eta(u) g(v) =$$

$$= \sum_{v \in V(G)} \eta(v) + \sum_{v \in V(G)} \left(g(v) \sum_{u \in N_G(v)} \eta(u)\right)$$

Prihliadnuc k definíciám zobrazení g a η platí:

$$\sum_{v\in V(G)} \eta(v) = \sum_{i=2}^{6} \sum_{v\in V_i} (6 - \deg_G(v)),$$

$$\sum_{v\in V(G)} \left(g(v) \sum_{u\in N_G(v)} \eta(u) \right) = \sum_{6<i} \sum_{\substack{v\in V_i \\ m_v\le 5}} (6 - \deg_G(v)) \ge \sum_{6<i} \sum_{v\in V_i} (6 - \deg_G(v)).$$

Spolu teda máme

$$\sum_{v\in V(G)} \lambda(v) = \sum_{v\in V(G)} \eta(v) + \sum_{v\in V(G)} \left(g(v) \sum_{u\in N_G(v)} \eta(u) \right) \ge$$

$$\ge \sum_{i=2}^{6} \sum_{v\in V_i} (6 - \deg_G(v)) + \sum_{6<i} \sum_{v\in V_i} (6 - \deg_G(v)) = \sum_{2\le i} \sum_{v\in V_i} (6 - \deg_G(v)) =$$
$$= \sum_{v\in V(G)} (6 - \deg_G(v)).$$

□

Všetky v tejto časti doteraz dokázané tvrdenia vedú k dôkazu nasledujúcej lemy.

Lema 5.6. *Ak G je f-kritický graf s $\Delta_f(G) = 8$, tak G nie je planárny graf.*

Dôkaz. Predpokladajme, že lema neplatí. Majme planárny f-kritický graf G s $\Delta_f(G) = 8$. Nech H je rovinný graf izomorfný s grafom G. Preň platí

$$\sum_{v\in V(H)} (6 - \deg_H(v)) + 2 \cdot \sum_{s\in F(H)} (3 - \deg_H(s)) = 12.$$

Stupeň každej steny v grafe G je aspoň 3, preto

$$12 = \sum_{v\in V(H)} (6 - \deg_H(v)) + 2 \cdot \sum_{s\in F(H)} (3 - \deg_H(s)) \le$$
$$\le \sum_{v\in V(H)} (6 - \deg_H(v)) = \sum_{v\in V(G)} (6 - \deg_G(v)) \le$$
$$\le \sum_{v\in V(G)} \lambda(v) \le \sum_{v\in V(G)} 0 = 0$$

Toto je teda hľadaný spor. □

Konečne máme dosť poznatkov na to, aby sme mohli dokázať vetu, ktorá je hlavným výsledkom tejto práce.

Veta 5.7. *Ak G je planárny graf a $f : \mathbf{V} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ je zobrazenie, pre ktoré je $\Delta_f(G) \ge 8$, tak $\chi'_f(G) = \Delta_f(G)$.*

Dôkaz. Predpokladajme, že platí $\chi'_f(G) = \Delta_f(G) + 1$, a teda $G \in C_f2$. Podľa Vety 2.2 existuje G', podgraf grafu G taký, že $\Delta_f(G') = 8$ a G' je f-kritický graf. Graf G' je taktiež planárny, lebo je podgrafom planárneho grafu G. Podľa Lemy 5.6 však takýto graf G' nie je planárny, čo je spor. □

6 Poďakovanie

Týmto by som sa rád poďakoval môjmu školiteľovi doc. Horňákovi za čas, ktorý mi venoval a za trpezlivosť, ktorú pri práci so mnou mal.

Referencie

[1] V.G. Vizing, *On an estimate of the chromatic class of a p-graph*, Diskret Analiz **3** (1964) 25-30

[2] S.L. Hakimi, O. Kariv, *A generalization of edge-coloring in graphs*, J. Graph Theory **10** (1986) 139-154

[3] X. Zhang, G.Z. Liu, *The classification of complete graphs K_n on f-coloring,* J. of Applied Mathematics & Computing **19** (2005) 127-133

[4] G.Z. Liu, J. Hou, J. Cai, *Some results about f-critical graphs* Networks **50** (2007) 197-202

[5] R. Diestel, *Graph Theory,* Springer-Verlag Heidelberg, New York, (2005) 94-97