

# Desingularizácia kriviek v afinnej rovine

ŠTUDENTSKÁ VEDECKÁ KONFERENCIA

Bc. Martina Bátorová

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



RNDr. Jana Pílniková, PhD.

Bratislava 2009

## Abstrakt

V našej práci sa venujeme problematike singulárnych kriviek v afinnej rovine. Na jednoduchých príkladoch predstavujeme singulárne krivky a uvádzame postup na ich detekciu. Ponúkame podrobný popis biracionálneho zobrazenia nazývaného “rozdtie roviny” (ang. blow-up), ktoré použijeme na rozklad singularít. Dokážeme niekoľko menších tvrdení.

## Kľúčové slová

singulárna krivka, rozklad singularity, desingularizácia, rozdtie roviny, blow-up.

## Bibliografická identifikácia

BÁTOROVÁ, Martina. Desingularizácia kriviek v afinnej rovine [študentská vedecká činnosť]. Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky. Školiteľ: RNDr. Jana Pílniková, PhD. Bratislava : FMFI UK, 2009. 49 s.

## **Abstract**

In our thesis we present singular planar curves. We introduce singularities by means of simple examples and problems, then we show how to detect them in general. We offer thorough description of two important birational map, “blow-up”, which we use for desingularization.

## **Key words**

singular curve, analysis of singularity, desingularization, blow-up.

# Obsah

<b>Zoznam obrázkov</b>	<b>3</b>
<b>1 Úvod</b>	<b>5</b>
<b>2 Krivky v afinnej rovine</b>	<b>7</b>
2.1 Prienik priamky a krivky . . . . .	7
2.2 Singulárne body . . . . .	16
<b>3 Zobrazenia medzi krivkami</b>	<b>22</b>
3.1 Parametrizácia . . . . .	22
3.2 Izomorfizmy a biracionálne zobrazenia . . . . .	30
3.3 Rozklad singularity . . . . .	34
3.3.1 Rozdutie roviny . . . . .	35
3.3.2 Odstránenie singularity . . . . .	37
3.3.3 Rozklad singularity ako nástroj na získanie parametrizácie . . . . .	46
<b>4 Záver</b>	<b>48</b>
<b>Literatúra</b>	<b>49</b>

# Zoznam obrázkov

2.1	Kružnica $\mathcal{C} : f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ je krivka symetrická podľa osí $\vec{x}, \vec{y}$ . V bode $(-1, 0)$ má dotyčnicu s rovnicou $x + 1 = 0$ . . . . .	10
2.2	Bod $(0, 0)$ krivky $\mathcal{C} : f(x, y) = x^4 - x^2 + y^2$ je príkladom singulari- ty, ktorú nazývame <i>obyčajná</i> - ku krivke v tomto bode máme <i>rôzne</i> dotyčnice. . . . .	13
2.3	Štvorlístková ruža $\mathcal{C} : f(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2$ má v zloženej sin- gularite $(0, 0)$ štyri dotyčnice, po dvoch totožné so súradnicovými osami. 15	15
2.4	Kružnica $\mathcal{C} : f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ je regulárna krivka. . . . .	20
2.5	Geronova lemniskáta $\mathcal{C} : f(x, y) = x^4 - x^2 + y^2$ je singulárna krivka s dvojnásobným bodom v $(0, 0)$ . . . . .	21
3.1	Kubická krivka $\mathcal{C} : f(x, y) = y^2 - x^2 - x^3$ má parametrizáciu $\varphi : t \mapsto$ $(t^2 - 1, t(t^2 - 1))$ . . . . .	24
3.2	Jednotková kružnica $\mathcal{C} : f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ má parametrizáciu $\varphi : t \mapsto \left( \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2} \right)$ pri stereograf. pr. z $(-1, 0)$ . . . . .	26
3.3	Parabola $\mathcal{C} : f(x, y) = y - x^2$ má param. $\varphi : t \mapsto (t, t^2)$ . . . . .	28
3.4	Rozdutie roviny v bode $(0, 0)$ . . . . .	37
3.5	Rozklad singularity metódou rozdutia roviny v bode. . . . .	39
3.6	Rozkladom krivky $\mathcal{C} : f(x, y) = y^2 - x^2 - x^3$ je $\mathcal{C}_\sigma : f_\sigma(x, y) = y^2 - 1 - x$ . 40	40
3.7	Rozkladom krivky $\mathcal{C} : f(x, y) = y^2 - x^5$ je najprv $\mathcal{C}_\varphi : f_\varphi(x, y) = y^2 - x^3$ a napokon $\mathcal{C}_{\varphi\varphi} : f_{\varphi\varphi}(x, y) = y^2 - x$ . . . . .	43

- 3.8 Krivka  $\mathcal{C} : f(x, y) = y^2 - x^2 - x^2y^2$  s dotyčnicami  $y = \pm x$  sa zobrazí na  $\mathcal{C}_\sigma$ , pričom  $\mathcal{C}_\sigma \cap \overleftrightarrow{y}$  tvoria body  $(0, \pm 1)$ . . . . . 46
- 3.9 Rozkladom singularity Geronovej lemniskáty  $\mathcal{C} : f(x, y) = x^4 - x^2 + y^2$  získame jednotkovú kružnicu  $\mathcal{C}_\sigma : f_\sigma(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . . . . . 47

# 1

## Úvod

Singularities sú klasickou témou nielen v geometrii, ale i v iných matematických disciplínach. Často sa vynárajú na neočakávaných miestach a vždy znamenajú jedno – nepríjemnosti. Veľmi jednoducho povedané, predstavujú správanie, ktoré by sme mohli označiť ako “nie celkom pekné”.

Okrem komplikácií v živote matematikov spôsobujú problémy i v reálnych aplikáciách – za všetky spomeňme vizualizácie v CAD systémoch, numerické výpočty, či robotiku. I rozsiahly výskum, ktorý v tejto oblasti stále prebieha, je dôkazom, že má zmysel sa touto témou zaoberať.

V našej práci sa venujeme problematike singularít implicitne definovaných rovinných kriviek. Jej cieľom je čitateľovi prístupnou a zrozumiteľnou formou predstaviť problematiku singularít a ich rozkladu.

Na začiatku si predstavíme rovinné krivky a ich singulárne body. Tieto sa naučíme detegovať a rozdelíme ich do skupín podľa zložitosti.

V druhej časti sa bližšie oboznámime so zobrazeniami medzi krivkami v afinnej rovine. Od parametrizácie plynulo prejdeme k izomorfizmom a biracionálnym zobrazeniam. Podrobne si predstavíme špeciálny typ biracionálneho zobrazenia, tzv. “rozdtutie

roviny v bode” (ang. *blow-up*). Toto nám umožní nájsť k singularnej biracionálnej ekvivalentnú krivku, ktorá singularity neobsahuje, alebo ich obsahuje jednoduchšie – čiže sa naučíme singularity rozkladať. Dokážeme niekoľko malých tvrdení, ktoré nám preberanú tému sformalizujú a dajú naším úvahám pevný podklad.

Navyše, nosnú tému práce, rozdutie roviny, spracujeme i formou animácií, ktoré populárnou formou predstavujú inak pomerne abstraktnú geometrickú konštrukciu.



## 2

# Krivky v afinnej rovine

Počas celej tejto kapitoly pracujeme v poli  $\mathbb{C}$ . Väčšinu argumentácií však budeme môcť bez väčších komplikácií vykonať v ľubovoľnom poli  $\mathcal{F}$ , ktoré je algebraicky uzavreté a jeho charakteristika je nula. Voľba poľa s takýmito vlastnosťami nám umožní vyslovovať silnejšie tvrdenia a celkovo výrazne uľahčí a zovšeobecni naše úvahy.

## 2.1 Prienik priamky a krivky

Na ilustráciu preberanej problematiky si uvedieme niekoľko príkladov kriviek. Naše úvahy začneme tým, že sa budeme snažiť nájsť také vlastnosti, ktoré by nám uvažované krivky pomohli načrtnúť. V prvom prípade - pri kružnici, je analýza vlastností takmer zbytočná, pretože všetci vieme, ako kružnica vyzerá. Napriek tomu si ju uvedieme. Pri ďalších príkladoch dospejeme k niekoľkým zaujímavým zisteniam, ktoré si bližšie vysvetlíme, pomenujeme a napokon zovšeobecníme.

**Príklad 2.1:** Uvažujme *kružnicu*  $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 1$ .

Predstavme si na chvíľu, že nevieme, ako kružnica vyzerá, a chceli by sme zistiť nejaké jej význačné vlastnosti, ktoré by nám ju pomohli načrtnúť.

1. Rovnicu  $\mathcal{C}$  môžeme implicitne zapísať

$$f(x, y) = 1 - y^2 - x^2.$$

## 2. Symetrie:

Krivka je symetrická podľa osi  $\vec{x}$  resp. podľa osi  $\vec{y}$ , ak časť krivky “pod osou” vyzerá rovnako, ako časť “nad osou”, teda ak pre  $x, y \in \mathbb{C}$  platí :

$$\vec{x} : f(x, y) = f(x, -y),$$

resp.

$$\vec{y} : f(x, y) = f(-x, y).$$

V našom prípade otázka symetrie znie nasledovne: platí, že

$$1 - x^2 - y^2 \stackrel{?}{=} 1 - x^2 - (-y)^2$$

resp.

$$1 - x^2 - y^2 \stackrel{?}{=} 1 - (-x)^2 - y^2?$$

Vidíme, že odpoveď je “áno” v oboch prípadoch, teda kružnica je symetrická podľa oboch osí. Pri vytváraní náčrtu to značí, že sa môžeme obmedziť iba napr. na prvý kvadrant, pretože vzhľad krivky v ostatných troch vieme získať pomocou zrkadlenia.

## 3. Prienik so súradnicovými osami:

Hľadáme body, ktoré ležia na súradnicových osiach a zároveň na kružnici. Súradnicové osi zapíšme parametricky ako priamky prechádzajúce bodom  $(0, 0)$ , určené smerovými vektormi  $(1, 0)$  a  $(0, 1)$ :

$$\begin{aligned} \vec{x}: X &= (0, 0) + t(1, 0) & \vec{y}: Y &= (0, 0) + t(0, 1) \\ x_1 &= 0 + 1t = t & y_1 &= 0 + 0t = 0 \\ x_2 &= 0 + 0t = 0 & y_2 &= 0 + 1t = t \end{aligned}$$

pre  $t \in \mathbb{C}$ , čo môžeme skrátene zapísať ako

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \{(t, 0) \mid t \in \mathbb{C}\} \\ \vec{y} &= \{(0, t) \mid t \in \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

Prienik osí a krivky získame dosadením parametrického vyjadrenia do rovnice krivky:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \cap \vec{x} &= \{(t, 0) \mid f(t, 0) = 0 \wedge t \in \mathbb{C}\} \\ \mathcal{C} \cap \vec{y} &= \{(0, t) \mid f(0, t) = 0 \wedge t \in \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

V našom prípade to znamená, že hľadáme body, pre ktoré platí:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \cap \vec{x} &= \{(t, 0) \mid 1 - t^2 = 0\} \\ \mathcal{C} \cap \vec{y} &= \{(0, t) \mid 1 - t^2 = 0\} \end{aligned}$$

Vyriešením rovníc

$$1 - t^2 = (1 + t)(1 - t) = 0$$

$$1 - t^2 = (1 + t)(1 - t) = 0$$

získame body  $\{(-1, 0), (1, 0)\}$  a  $\{(0, -1), (0, 1)\}$ .

Jednotková kružnica so stredom  $(0, 0)$  má teda so súradnicovými osami práve štyri body prieniku – presne tak, ako nám hovorí intuícia.

**Poznámka:** Na výpočet prienikov s osami sme mohli použiť i prístup založený na symetrii. Inými slovami stačilo zistiť prieniky patriace do prvého kvadrantu, a ďalšie vhodne dopočítať.

#### 4. Okolie krivky:

Skúsme zistiť, ako sa krivka správa v blízkosti bodov, ktoré sme vyššie dopočítali. Zo strednej školy vieme, že takýto intuitívny popis nám poskytuje priamka, ktorú nazývame *dotyčnica*. Avšak ktorá z priamok, ktoré prechádzajú daným bodom krivky, je dotyčnicou v tomto bode a čo to znamená?

Krivku  $\mathcal{C}$  máme zadanú implicitne (vzorcom), uvažujme teda priamku

$$\lambda : P = A + t\mathbf{l}, t \in \mathbb{C},$$

čo znamená, že máme priamku, ktorá prechádza bodom  $A \in \mathcal{C}$  a má smerový vektor  $\mathbf{l} = (l_1, l_2)$ . Nech  $A = (-1, 0) \in \mathcal{C}$ .

Na získanie prieniku  $\lambda \cap \mathcal{C}$  stačí dosadiť parametrické vyjadrenie priamky do rovnice kružnice a dopočítať hodnotu parametra  $t$ :

$$\begin{aligned} 1 - x^2 - y^2 &= 0 \\ 1 - (-1 + l_1 t)^2 - (0 + l_2 t)^2 &= 0 \\ -t(2l_1 - t(l_1^2 + l_2^2)) &= 0 \end{aligned}$$

Pre  $t = 0$  rovnosť platí. Priesečníkom  $\lambda \cap \mathcal{C}$  je vtedy bod

$$P = (-1 + 0l_1, 0 + 0l_2) = (-1, 0),$$

čo je prirodzené. Priamky sme totiž volili tak, aby bodom  $(-1, 0)$  prechádzali. Vidíme však, že okrem tohto očakávaného priesečníka má krivka s priamkou spoločný ďalší bod, a to pre hodnotu parametra  $t = \frac{2l_1}{l_1^2 + l_2^2}$ . Tu môžu nastať

dve situácie:  $t \neq 0$  a  $t = 0$ .

Prvá možnosť nastáva pri väčšine priamok. S kružnicou majú spoločné dva rôzne body (napr. ak uvažujeme vektor  $\mathbf{l} = (1, 1)$ , parameter druhého priesečníka má hodnotu  $t = 1$ , čím získame bod  $Q = (0, 1)$ ). Takéto priamky nazývame *sečnice*.

Druhý prípad nastáva, ak  $2l_1 = 0$ , a teda naša rovnica má tvar

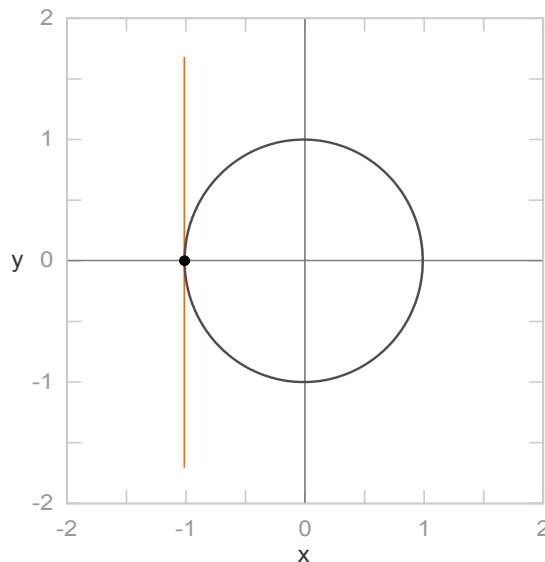
$$-t(2l_1 - t(l_1^2 + l_2^2)) = -t(-tl_2^2) = t^2l_2^2 = 0.$$

Vyriešením získame dvojnásobný koreň  $t = 0$ . Tento fakt reprezentujeme tak, že priamka  $\lambda$  má s krivkou v bode  $(-1, 0)$  dvojnásobný priesečník. Nazveme ju *dotyčnicou*.

Takto sme na základe násobnosti prieniku v danom bode získali rozdelenie priamok na sečnice a dotyčnice.

Dotyčnicami v bodoch prieniku krivky so súradnicovými osami sú štyri priamky. V bode  $(-1, 0)$  je to priamka so smerovým vektorom  $(0, l_2)$ , ktorý bez ujmy na všeobecnosti môžeme považovať za vektor  $(0, 1)$ . Rovnica dotyčnice je potom  $x + 1 = 0$ .

V ostatných bodoch prieniku sú dotyčnicami priamky  $x - 1 = 0, y \pm 1 = 0$ .



Obrázok 2.1: Kružnica  $\mathcal{C} : f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$  je krivka symetrická podľa osí  $\vec{x}, \vec{y}$ . V bode  $(-1, 0)$  má dotyčnicu s rovnicou  $x + 1 = 0$ .

**Poznámka:** Odteraz budeme slovné spojenie “bez ujmy na všeobecnosti” nahradzovať skratkou *BUNV*.

Taktiež v situáciách, keď sa nám to bude hodiť, zápisom “ $(0, l_2) \stackrel{BUNV}{=} (0, 1)$ ” budeme rozumieť, že vektor  $(0, l_2)$  môžeme BUNV reprezentovať vektorom  $(0, 1)$ .

**Príklad 2.2:** Uvažujme krivku *osmička* (ang. *eight curve*), zvanú taktiež *Geronova lemniskáta* (ang. *Gerono lemniscate*) s rovnicou  $\mathcal{C} : x^4 = x^2 - y^2$ .

Opäť sa pokúsme krivku načrtnúť.

1. Implicitná rovnica krivky  $\mathcal{C}$  je

$$f(x, y) = x^4 - x^2 + y^2.$$

2. Symetrie:

Ako sme si uviedli v prvom príklade, krivka je symetrická podľa osí  $\vec{x}$  resp. podľa osí  $\vec{y}$ , ak platí :

$$\vec{x} : f(x, y) = f(x, -y),$$

resp.

$$\vec{y} : f(x, y) = f(-x, y).$$

Máme teda rozhodnúť, či

$$x^4 - x^2 + y^2 \stackrel{?}{=} x^4 - x^2 + (-y)^2$$

resp.

$$x^4 - x^2 + y^2 \stackrel{?}{=} (-x)^4 - (-x)^2 + y^2.$$

Vidíme, že obe rovnosti platia, a teda krivka  $\mathcal{C}$  je symetrická podľa osí  $\vec{x}, \vec{y}$ .

3. Prienik so súradnicovými osami:

Osi definujeme rovnako ako v prípade kružnice, teda:

$$\vec{x} = \{(t, 0) \mid t \in \mathbb{C}\}$$

$$\vec{y} = \{(0, t) \mid t \in \mathbb{C}\}$$

Prienik krivky a osí tvoria body, pre ktoré platí:

$$\mathcal{C} \cap \vec{x} = \{(t, 0) \mid t^4 - t^2 = 0\}$$

$$\mathcal{C} \cap \vec{y} = \{(0, t) \mid t^2 = 0\}$$

Po vyriešení rovníc

$$\begin{aligned} t^4 - t^2 &= t^2(t^2 - 1) = t^2(t + 1)(t - 1) &= 0 \\ & & t^2 &= 0 \end{aligned}$$

vidíme, že prienik krivky a osí tvoria body  $\{(1, 0), (-1, 0), (0, 0)\}$ , pričom bod  $(0, 0)$  sme získali “dvakrát”.

#### 4. Dotyčnice v bodoch prieniku s osami:

Rovnako ako v príklade s kružnicou, nájdime dotyčnice v bodoch  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$  a  $(0, 0)$ .

Dotyčnica v bode  $(1, 0)$ :

Bod na priamke  $\lambda$  prechádzajúcej bodom  $(1, 0)$  so smerovým vektorom  $(l_1, l_2)$  môžeme skrátane parametricky vyjadriť ako  $P = (1 + l_1t, l_2t)$  pre nejaké  $t \in \mathbb{C}$ . Tento bod je priesečníkom  $\lambda \cap \mathcal{C}$ , ak

$$\begin{aligned} x^4 - x^2 + y^2 &= 0 \\ (1 + l_1t)^4 - (1 + l_1t)^2 + (l_2t)^2 &= 0 \\ t(l_1^4t^3 + 4l_1^3t^2 + t(l_2^2 + 5l_1^2) + 2l_1) &= 0 \end{aligned}$$

Predchádzajúca rovnosť platí, ak  $t = 0$ , čo zodpovedá bodu  $(1, 0)$ . Dotyčnicou bude preto priamka, ktorá bude mať v tomto bode s krivkou dvojnásobný priesečník. To nastáva práve vtedy, ak  $2l_1 = 0$ , teda pre priamku so smerovým vektorom  $(0, l_2) \stackrel{BUNV}{=} (0, 1)$ . Dopočítaním získame rovnicu  $x - 1 = 0$ .

Dotyčnica v bode  $(-1, 0)$ :

Dotyčnicu môžeme vypočítať rovnakým spôsobom, ako v prípade bodu  $(1, 0)$ . Môžeme si však ušetriť prácné počítanie, a využiť symetrickosť krivky podľa osi  $\overleftrightarrow{y}$ , čím získame hľadanú rovnicu  $x + 1 = 0$ .

Dotyčnica v bode  $(0, 0)$ :

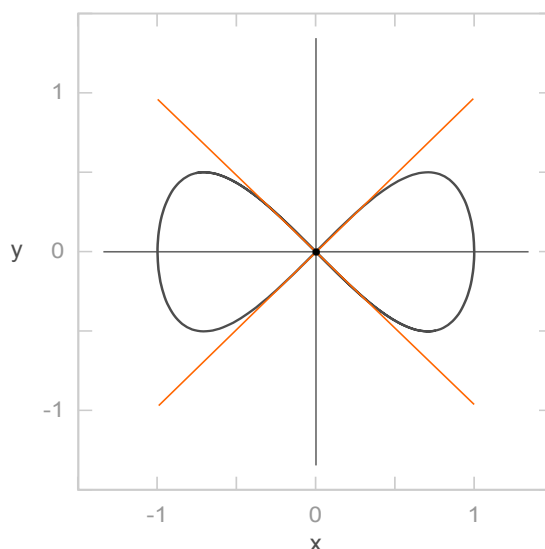
Uvažujme priamky prechádzajúce týmto bodom. Parametricky priamku  $\lambda$ ,  $(0, 0) \in \lambda$  zapíšeme ako  $\lambda = \{P \mid P = (l_1t, l_2t), t \in \mathbb{C}\}$ . Prienik s krivkou získame dopočítaním parametra  $t$  z rovnice

$$\begin{aligned} x^4 - x^2 + y^2 &= 0 \\ (l_1t)^4 - (l_1t)^2 + (l_2t)^2 &= 0 \\ t^2(l_1^2t^2 - l_1^2 + l_2^2) &= 0 \end{aligned}$$

Vidíme, že všetky priamky prechádzajúce bodom  $(0,0)$  majú v tomto bode s krivkou aspoň dvojnásobný prienik. Trojnásobný prienik má priamka, pre ktorú

$$(l_2^2 - l_1^2) = (l_2 - l_1)(l_2 + l_1) = 0.$$

Riešením je  $l_2 = \pm l_1$ , teda  $(l_1, l_2) \stackrel{BUNV}{\in} \{(1, 1), (1, -1)\}$ .



Obrázok 2.2: Bod  $(0,0)$  krivky  $\mathcal{C} : f(x, y) = x^4 - x^2 + y^2$  je príkladom singularity, ktorú nazývame *obyčajná* - ku krivke v tomto bode máme *rôzne* dotyčnice.

Krivka obsahuje bod, v ktorom ľubovoľná priamka pretína krivku aspoň dvakrát. V predchádzajúcom príklade (pr. 2.1) sme dotyčnicou nazvali priamku, ktorá sa od ostatných líšila počtom priesečníkov v danom bode. Rovnako i tu, dotyčnicou v bode budeme nazývať takúto výnimočnú priamku, teda v našom prípade takú, ktorá má s krivkou  $\mathcal{C}$  v  $(0,0)$  aspoň trojnásobný priesečník (obr. 2.2).

Zovšeobecnieme si pojem dotyčnice v nasledujúcej definícii:

**Definícia 2.1 (Dotyčnica):** Uvažujme krivku  $\mathcal{C}$  a bod  $P = (p_1, p_2), P \in \mathcal{C}$ . Nech ľubovoľná priamka prechádzajúca bodom  $P$  má s  $\mathcal{C}$  v tomto bode aspoň  $r$ -násobný prienik. *Dotyčnicou ku krivke  $\mathcal{C}$  v bode  $P$*  nazveme takú priamku  $\lambda$ , ktorá má s  $\mathcal{C}$  v  $P$   $(r + 1)$ -násobný prienik.

Ukázali sme si, že krivka môže obsahovať body, v ktorých nastáva zaujímavá situácia: máme v nich ku krivke nie jednu, ale viacero dotyčníc. Takáto situácia zodpovedala tomu, že ľubovoľná priamka mala s krivkou v uvažovanom bode viacnásobný prienik.

**Definícia 2.2 (Singulárny a regulárny bod):** Majme krivku  $\mathcal{C}$  a na nej bod  $P$ . V prípade, že ľubovoľná priamka má v bode  $P$  s  $\mathcal{C}$  aspoň dvojnásobný prienik, bod  $P$  nazveme *singulárnym bodom* krivky, alebo skráteno *singularitou*. V opačnom prípade ho budeme nazývať *regulárnym* alebo *jednoduchým* bodom krivky.

**Definícia 2.3 (Dotykový kužeľ):** Zjednotenie všetkých dotyčníc v singulárnom bode krivky nazveme *dotykový kužeľ*.

**Definícia 2.4 (Singulárna a regulárna krivka):** Krivku, ktorej všetky body sú regulárne, nazveme *regulárnou*, krivku s aspoň jedným singulárnym bodom nazveme *singulárnou*.

**Definícia 2.5 (Obyčajná a zložená singularita):** Uvažujme krivku  $\mathcal{C}$  a jej singulárny bod  $P$ . Ak dotykový kužeľ v  $P$  tvoria navzájom rôzne dotyčnice, bod  $P$  nazveme *obyčajnou* singularitou. V opačnom prípade ho nazveme singularitou *zloženou*.

Príkladom obyčajnej singularity je bod  $(0, 0)$  v pr. 2.2. Zloženú singularitu si ukážeme v nasledujúcom príklade.

**Príklad 2.3:** Uvažujme *štvorlístkovú ružu* (ang. *quadrifolium*)  $\mathcal{C} : f(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2$ .

1. Krivka je symetrická podľa osi  $\vec{x}$  aj podľa osi  $\vec{y}$  a má s nimi spoločný jediný bod  $(0, 0)$ .
2. Dotyčnica v bode  $(0, 0)$ :  
 Dosadením parametrického vyjadrenia priamky  $\lambda : P = (l_1t, l_2t), t \in \mathbb{C}$  do rovnice  $\mathcal{C}$  vidíme, že bod  $(0, 0)$  je opäť singulárnym bodom:

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2 &= 0 \\ ((l_1t)^2 + (l_2t)^2)^3 - 4(l_1t)^2(l_2t)^2 &= 0 \\ t^4(t^2(l_1^2 + l_2^2))^3 - 4l_1^2l_2^2 &= 0 \end{aligned}$$



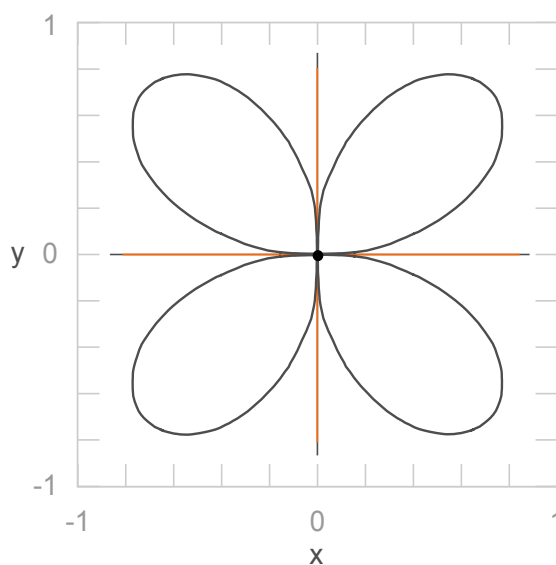
Ľubovoľná priamka prechádzajúca bodom  $(0, 0)$  má s krivkou aspoň štvornásobný prienik. Dotyčnicou je priamka, pre ktorú platí rovnosť  $4l_1^2l_2^2 = 0$ , čiže ak  $l_1 = 0 \vee l_2 = 0$ . Pretože pri riešení rovníc musíme prihliadať na násobnosť, získame až štyri po dvoch totožné smerové vektory:

$$(l_1, l_2) \stackrel{BUNV}{\in} \{(0, 1), (1, 0)\}.$$

Dotyčnice sú potom priamky po dvoch totožné so súradnicovými osami:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_2 &= \{P \mid P = (0, t), t \in \mathbb{C}\} \quad (\vec{y}) \\ \lambda_3 = \lambda_4 &= \{P \mid P = (t, 0), t \in \mathbb{C}\} \quad (\vec{x}) \end{aligned}$$

Bod  $(0, 0)$  krivky na obr. 2.3 je teda znova príkladom zloženej singularity.



Obrázok 2.3: Štvorlístková ruža  $\mathcal{C} : f(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2$  má v zloženej singularite  $(0, 0)$  štyri dotyčnice, po dvoch totožné so súradnicovými osami.

V predchádzajúcich príkladoch sme si ukázali krivku, ktorá mala v ľubovoľnom bode práve jednu dotyčnicu a dve krivky s viacerými dotyčnicami v jednom bode. Takto sa nám podarilo rozdeliť body krivky na regulárne a singularne, a singularity na obyčajné a zložené. Namiesto je preto otázka, či existuje nejaký rozumný prístup, ktorý nám umožní pre ľubovoľnú krivku jednoducho a presne určiť dotyčnicu v zvolenom bode a/alebo singularne body, ak krivka nejaké má.

## 2.2 Singulárne body

Majme krivku  $\mathcal{C}$  určenú implicitne polynómom  $f(x, y)$  stupňa  $n$ . Uvažujme bod  $A = (a_1, a_2) \in \mathcal{C}$  a ním prechádzajúcu priamku  $\lambda$  so smerovým vektorom  $\mathbf{l} = (l_1, l_2)$ . Rovnicu priamky  $\lambda$  potom vieme zapísať v tvare  $\lambda = \{P \mid P = (a_1 + l_1 t, a_2 + l_2 t), t \in \mathbb{C}\}$ , čo niekedy budeme skrátene zapisovať ako  $\lambda : P = A + t\mathbf{l}, t \in \mathbb{C}$ .

Priesečník  $Q = (q_1, q_2) \in \lambda \cap \mathcal{C}$  vieme získať tak, že dosadíme parametrické vyjadrenie priamky do implicitnej rovnice krivky:

$$f(A + t\mathbf{l}) = f(a_1 + tl_1, a_2 + tl_2) = f(x(t), y(t)) =: g(t)$$

a dopočítame korene  $t$  polynómu  $g(t)$ . Tieto dosadíme do vyjadrenia priamky a získame súradnice  $Q$ .

Jedným z riešení je určite bod  $A$ , pretože sme ho volili tak, aby súčasne patrilo krivke aj priamke. Reprezentuje ho koreň  $t = 0$ , pretože:

$$f(a_1, a_2) = f(a_1 + 0l_1, a_2 + 0l_2) = f(x(0), y(0)) = g(0).$$

Ukázali sme si, ako môžeme vypočítať súradnice bodov prieniku krivky a priamky. Teraz sa skúsme pozrieť, či nám  $g(t)$  nevie o priesečníkoch povedať i niečo viac, než len súradnice. Konkrétne nás bude zaujímať správanie v bode  $A$ .

Výraz  $g(t)$  je polynóm jednej premennej. Možno ho podľa  $t$  v bode  $a$  rozvinúť do Taylorovho radu (takýto rozvoj označme  $g[t, a]$ ), čím získame výraz

$$\begin{aligned} g[t, a] &= g(a) + \frac{1}{1!} g'(a)(t - a) + \frac{1}{2!} g''(a)(t - a)^2 + \frac{1}{3!} g'''(a)(t - a)^3 + \dots = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} g^{(i)}(a)(t - a)^i. \end{aligned}$$

Pretože bod  $A$  zodpovedá nule ako koreňu  $g$ , dosadením  $a = 0$  sa nám rozvoj vyššie zredukuje na MacLaurinov rad:

$$g[t, a = 0] = g(0) + \frac{1}{1!} g'(0)t + \frac{1}{2!} g''(0)t^2 + \frac{1}{3!} g'''(0)t^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} g^{(i)}(0)t^i$$

Zapíšme si podrobne niekoľko prvých členov tohto rozvoja:

$$\begin{aligned}
g(0) &= f(x(0), y(0)) = f(a_1, a_2) = 0 \\
g'(0) &= \frac{\partial}{\partial t} g(0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \right) \Bigg|_{\substack{A=(a_1, a_2) \\ t=0}} = \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(A) \frac{\partial x}{\partial t}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \frac{\partial y}{\partial t}(0) = \\
&= f_x(A)x_t(0) + f_y(A)y_t(0) = \\
&= f_x(A)l_1 + f_y(A)l_2 \\
g''(0) &= \frac{\partial}{\partial t} g'(0) = \frac{\partial}{\partial t} (f_x l_1 + f_y l_2) \Bigg|_{\substack{A=(a_1, a_2) \\ t=0}} = \\
&= \left( l_1 \frac{\partial f_x}{\partial t} + l_2 \frac{\partial f_y}{\partial t} \right) \Bigg|_{\substack{A=(a_1, a_2) \\ t=0}} = \\
&= \left[ l_1 \left( \frac{\partial f_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \right) + l_2 \left( \frac{\partial f_y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right] \Bigg|_{\substack{A=(a_1, a_2) \\ t=0}} = \\
&= l_1 [f_{xx}(A)x_t(0) + f_{xy}(A)y_t(0)] + l_2 [f_{yx}(A)x_t(0) + f_{yy}(A)y_t(0)] = \\
&= l_1 [f_{xx}(A)l_1 + f_{xy}(A)l_2] + l_2 [f_{yx}(A)l_1 + f_{yy}(A)l_2] = \\
&= l_1^2 f_{xx}(A) + 2l_1 l_2 f_{xy}(A) + l_2^2 f_{yy}(A) \\
g'''(0) &= \frac{\partial}{\partial t} g''(0) = \dots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Dosaďme predchádzajúce výrazy do pôvodného rozvoja:

$$\begin{aligned}
g[t, 0] &= g(0) + \frac{1}{1!} g'(0)t + \frac{1}{2!} g''(0)t^2 + \frac{1}{3!} g'''(0)t^3 + \dots = \\
&= g(0) + [l_1 f_x + l_2 f_y] t + \frac{1}{2} [l_1^2 f_{xx} + 2l_1 l_2 f_{xy} + l_2^2 f_{yy}] t^2 + \dots + \\
&+ \frac{1}{r!} \left[ \binom{r}{0} l_1^r f_{x^r} + \binom{r}{1} l_1^{r-1} l_2 f_{x^{r-1}y} + \dots + \binom{r}{r} l_2^r f_{y^r} \right] t^r + \dots \Bigg|_{A=(a_1, a_2)} = \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{i!} \left( \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} l_1^{i-j} l_2^j f_{x^{i-j}y^j}(A) \right) t^i = \\
&\stackrel{(*)}{=} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \left( \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} l_1^{i-j} l_2^j f_{x^{i-j}y^j}(A) \right) t^i.
\end{aligned}$$

**Poznámka:** (\*) Derivácie polynómu  $g(t)$  vyššieho ako  $n$ -tého rádu nemusíme uvažovať, pretože vtedy  $g^{(m)}(t) \equiv 0$  pre ľubovoľné  $m > n, m \in \mathbb{N}$ . Taktiež, keďže  $g(0) = 0$ , stačí nám uvažovať členy pre  $i \geq 1$ .

Predchádzajúce odvodenie nám umožňuje reprezentovať polynóm  $g(t)$  ako *konečný* súčet (nenulových) členov závisiacich iba od  $t$ . Skúsme sa spolu pozrieť, čo na základe toho vieme povedať o krivke  $\mathcal{C}$  v bode  $A$ .

1. Bod  $A$  sme volili tak, aby  $A \in \mathcal{C}$ . Preto  $0 = f(A) = f(A + 0\mathbf{I}) = f(a_1 + 0l_1, a_2 + 0l_2) = g(0)$ .
2. Nech  $f_x$  a  $f_y$  nie sú v  $A$  súčasne nulové:  $[f_x(A) \neq 0 \vee f_y(A) \neq 0]$ .

V takomto prípade rozvoj  $g(t)$  obsahuje lineárny člen. Túto skutočnosť interpretujeme tak, že takmer každá priamka prechádzajúca bodom  $A$  má v tomto bode s krivkou  $\mathcal{C}$  jednoduchý priesečník. Jedinou výnimkou je priamka, ktorá lineárny člen eliminuje - to je tá, pre ktorú platí, že  $f_x(A)l_1 + f_y(A)l_2 = 0$ . Priesečník tejto priamky s krivkou je (aspoň) dvojnásobný (najmenší člen rozvoja po dosadení  $(l_1, l_2)$  je (aspoň) kvadratický).

Túto priamku sme nazvali *dotyčnicou* krivky  $\mathcal{C}$  v bode  $A$ . Smer jej normály je  $(f_x(A), f_y(A))$ . Bod  $A$  sme nazvali *jednoduchým* alebo *regulárnym* bodom krivky  $\mathcal{C}$ .

3. Nech  $[f_x(A) = 0 \wedge f_y(A) = 0]$ .

Rozvoj polynómu potom určite neobsahuje lineárny člen, čo znova geometricky interpretujeme tak, že ľubovoľná priamka prechádzajúca cez  $A$  má v  $A$  aspoň dvojnásobný prienik s  $\mathcal{C}$ . Ak navyše aspoň jedna druhá derivácia  $f$  v  $A$  je nenulová:

$$[f_{xx}(A) \neq 0 \vee f_{xy}(A) \neq 0 \vee f_{yy}(A) \neq 0],$$

potom rozvoj  $g[t, 0]$  obsahuje kvadratický člen. Čiže takmer všetky priamky prechádzajúce cez  $A$  majú s  $\mathcal{C}$  dvojnásobný prienik. Avšak priamky spĺňajúce predpis  $g''(0) = 0$  majú s  $\mathcal{C}$  (aspoň) trojnásobný prienik.

Výraz  $g''(0)$  vieme vďaka algebraickej uzavretosti poľa  $\mathbb{C}$  úplne faktorizovať na lineárne komponenty

$$g''(0) = (\beta_{11}l_1 + \beta_{12}l_2)(\beta_{21}l_1 + \beta_{22}l_2).$$

Získame smery normál dotykového kužeľa krivky  $\mathcal{C}$  v  $A$ , vektory  $(\beta_{11}, \beta_{12})$  a  $(\beta_{21}, \beta_{22})$ .

Bod  $A$  je *singulárnym*, konkrétne dvojnásobným bodom krivky  $\mathcal{C}$ .

⋮

$r \leq n$  Nech všetky derivácie polynómu  $g(0)$  až do rádu  $r - 1$  sú nulové, t.j.  $g'(0) = g''(0) = \dots = g^{(r-1)}(0) = 0$ . Nech aspoň jedna derivácia rádu  $r$  nenadobúda hodnotu 0. Potom takmer všetky priamky prechádzajúce bodom  $A$  majú s  $\mathcal{C}$  v  $A$   $r$ -násobný prienik a zároveň existuje práve  $r$  priamok takých, že ich priesečník s  $\mathcal{C}$  je (aspoň)  $(r + 1)$ -násobný. Faktorizáciou  $g^{(r)}(0)$  na lineárne komponenty získame smery normál dotyčníc – vektory  $(\beta_{i1}, \beta_{i2}), i = 1, \dots, r$ .

Bod  $A$  je potom  $r$ -násobným bodom krivky  $\mathcal{C}$ .

**Poznámka:** Niekedy bude pre nás výhodné označovať bod *nepatriaci*  $\mathcal{C}$  ako bod s násobnosťou *nula*. Navyše, je potrebné si uvedomiť, že pojmy “násobnosť bodu” a “násobnosť priesečníka” spolu súvisia, ale nepopisujú to isté. Násobnosť *bodu* je vlastnosť *krivky* v tomto bode. Násobnosť *priesečníka* závisí od *priamky*, ktorú uvažujeme.

Z našich predchádzajúcich úvah je zjavné, že nutnou aj postačujúcou podmienkou singularnosti bodu  $A$  je platnosť  $f(A) = f_x(A) = f_y(A) = 0$ .

V príkladoch 2.1 - 2.3 sme vždy pracovali lokálne: vybrali sme si nejaký konkrétny bod a skúmali, ako sa krivka v ňom správa. Vybudovaná teória nám však umožňuje uchopiť krivku globálne, čo si ukážeme v prípade kružnice a Geronovej lemniskáty.

**Príklad 2.4:** Uvažujme opäť jednotkovú kružnicu  $\mathcal{C} : f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  a skúsme nájsť jej singularne body.

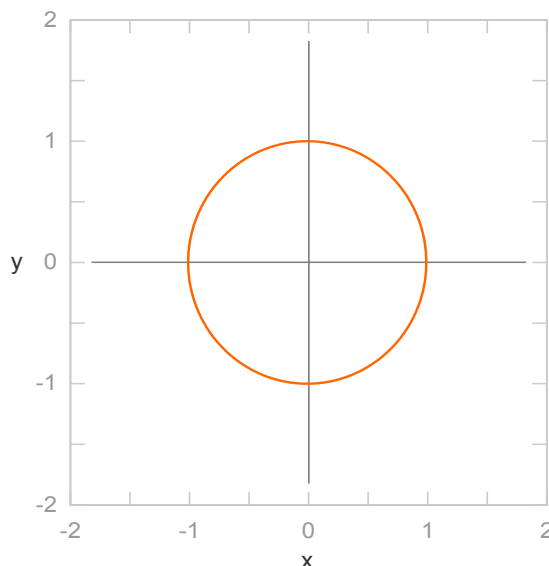
Ukázali sme si, že nutnou aj postačujúcou podmienkou singularnosti bodu krivky je rovnosť prvých parciálnych derivácií v tomto bode nule. Preto ak kružnica má nejaké singularne body, túto podmienku musia spĺňať:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 2y \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} 2x = 0 \iff x = 0 \\ 2y = 0 \iff y = 0 \end{array}$$

Máme teda jediného kandidáta na singularný bod, a to  $(0, 0)$ . Jednoduchým dosadením však zistíme, že tento bod na kružnici neleží. Preto  $\mathcal{C}$  nemá žiadne singularne body, je *regulárnou* krivkou. Geometricky tento fakt interpretujeme tak, že kružnica má v ľubovoľnom svojom bode  $(x, y)$  *práve jednu* dotyčnicu. Vďaka našim poznatkom vieme určiť i jej normálový vektor, je to  $\mathbf{n} = (f_x, f_y)$ .

Pre bod napr.  $(-1, 0)$  máme  $\mathbf{n} = (f_x, f_y)|_{(-1,0)} = (2x, 2y)|_{(-1,0)} = (-2, 0)$  a dotyčnica má rovnicu  $-2x - 2 = 0 \iff x + 1 = 0$ .

Vidíme, že sme sa dopracovali k rovnakému výsledku ako v príklade 2.1.



Obrázok 2.4: Kružnica  $\mathcal{C} : f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  je regulárna krivka.

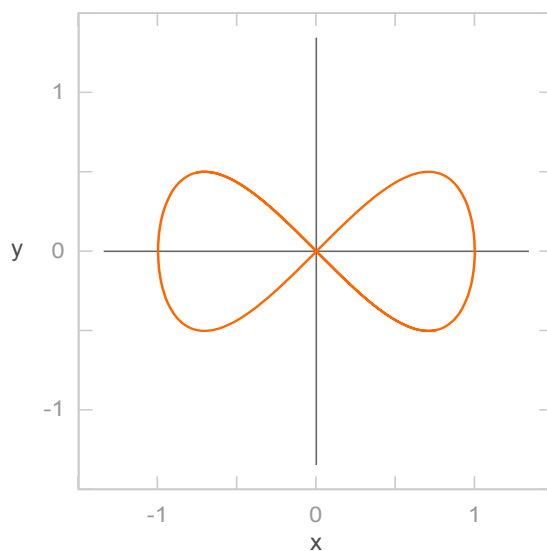
**Príklad 2.5:** Nájdime singularity Geronovej lemniskáty  $\mathcal{C} : f(x, y) = x^4 - x^2 + y^2$ .

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 4x^3 - 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 2y \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} 4x^3 - 2x = 0 \iff x = 0 \vee x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2y = 0 \iff y = 0 \end{array}$$

Pre  $\mathcal{C}$  máme troch kandidátov na singulárny bod:  $(0, 0)$ ,  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ ,  $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ . Dosadením zistíme, že na lemniskáte leží iba jediný z uvedených bodov, a to počiatok sústavy súradníc. Na predchádzajúcich stranách sme si tiež ukázali, ako určiť *násobnosť* (singulárneho) bodu - stačí nájsť prvú nenulovú deriváciu v tomto bode. Pre  $(0, 0)$  preto máme:

$$\begin{aligned}
 f_x \big|_{(0,0)} &= 4x^3 - 2x \big|_{(0,0)} = 0 \\
 f_y \big|_{(0,0)} &= 2y \big|_{(0,0)} = 0 \\
 f_{xx} \big|_{(0,0)} &= 12x^2 - 2 \big|_{(0,0)} = -2 \\
 f_{xy} \big|_{(0,0)} &= 0 \big|_{(0,0)} = 0 \\
 f_{yy} \big|_{(0,0)} &= 2 \big|_{(0,0)} = 2
 \end{aligned}$$

Vidíme, že prvá nenulová derivácia je druhého rádu, preto singulárny bod  $\mathcal{C}$  je dvojnásobný bod.



Obrázok 2.5: Geronova lemniskáta  $\mathcal{C} : f(x, y) = x^4 - x^2 + y^2$  je singulárna krivka s dvojnásobným bodom v  $(0, 0)$ .

# 3

## Zobrazenia medzi krivkami

Tak ako v predchádzajúcej kapitole, i pri ďalších našich úvahách pracujeme v poli  $\mathbb{C}$ .

### 3.1 Parametrizácia

V predchádzajúcej kapitole sme pri snahe uchopiť krivku matematicky použili *implicitný zápis* (alebo zápis, ktorý sme na implicitný previedli), čiže polynóm  $f(x, y)$  stupňa  $n$ . Tento spôsob však nie je jediný, často nám viac o krivke prezradí jej *parametrické vyjadrenie*, hoci nie vždy je možné ho nájsť.

Každopádne, chceli by sme pomocou jediného parametra popísať celú krivku (neskôr uvidíme, že to tak celkom nepôjde) – čiže žiadame, aby *parametrizácia krivky*  $\mathcal{C}$  bolo po zložkách definované zobrazenie

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{C} &\longmapsto \mathbb{A}^2(\mathbb{C}) \\ t &\longmapsto (\varphi_1(t), \varphi_2(t)), \end{aligned}$$

pre ktoré platí

$$\forall (x, y) \in \mathcal{C} \quad \exists t \in \mathbb{C} : \quad (x, y) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$$

Inými slovami, zobrazenie  $\varphi(t)$  je parametrizáciou, ak ním vieme popísať ľubovoľný bod krivky.

**Poznámka:** Často budeme pri známom kontexte kvôli lepšej čitateľnosti a prehľadnosti zápisu vynechávať premennú  $t$ , teda písať  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ .



V nasledujúcej časti si ukážeme parametrické vyjadrenie niektorých známych kriviek.

**Príklad 3.1:** Uvažujme *priamku*  $\lambda$  so smerovým vektorom  $\mathbf{l}$ , prechádzajúcu bodom  $A$ .

Parametrické vyjadrenie priamky sme používali v predchádzajúcej kapitole, a čitateľovi je určite známe i zo strednej školy.

Pre zadaný smerový vektor  $\mathbf{l} = (l_1, l_2)$  a bod  $A = (a_1, a_2) \in \lambda$  získame vyjadrenie  $\lambda$  (resp. všetkých jej bodov  $(x, y)$ ) ako

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1 = a_1 + l_1 t \\ y &= \varphi_2 = a_2 + l_2 t \quad t \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

**Príklad 3.2:** Uvažujme krivku  $\mathcal{C}$  zadanú implicitne rovnicou  $f(x, y) = y^2 - x^2 - x^3$ .

Jednoduchým overením zistíme, že krivka je komplikovaná singularitou v počiatku, preto odhadnúť predpis  $\varphi$  nie je také jednoduché ako v prípade paraboly (pr. ??). Na vyriešenie úlohy použijeme podobný postup ako v prvej kapitole pri hľadaní dotyčníc: budeme skúmať prienik priamky a krivky.

Uvažujme priamky  $\lambda$  a  $\kappa$ . Nech  $\lambda$  prechádza počiatkom sústavy súradníc a má predpis  $\lambda : y = kx$ . Nech  $\kappa$  je daná predpisom  $\kappa : x - 1 = 0$ . Pozrime sa na ich priesečník.

Pre jednoduchosť výpočtu si vyjadríme jednu z priamok v parametrickom tvare, nech je to  $\kappa$ . Potom máme  $\kappa : (1, 0) + t(0, 1) = (1, t), t \in \mathbb{C}$  (môžeme sa na ňu pozrieť ako na jednorozmerný parametrický priestor v premennej  $t$ , ktorý sme vnorili do roviny). Dosadením predpisu  $\kappa$  do rovnice  $\lambda$  získame

$$\kappa \cap \lambda = (1, t) : t = 1k \implies k = t.$$

Vidíme, že sa nám podarilo vyjadriť  $\lambda$  pomocou parametra  $t$  ako  $\lambda : y = tx$ . Priamku  $\lambda$  máme parametrizovanú, preto na výpočet  $\lambda \cap \mathcal{C}$  stačí dosadiť parametrické vyjadrenie  $\lambda$  do rovnice  $\mathcal{C}$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lambda : \quad y = tx \\ \mathcal{C} : \quad y^2 = x^2 + x^3 \\ \lambda \cap \mathcal{C} : \quad (tx)^2 = x^2 + x^3 \\ \quad \quad \quad t^2 = 1 + x \end{array} \right\} \implies \begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t(t^2 - 1) \end{cases}$$

Korektnosť nájdeného predpisu parametrizácie  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : t \mapsto (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$ ,  $t \in \mathbb{C}$  overíme dosadením:

$$t^2(t^2 - 1)^2 - (t^2 - 1)^2 - (t^2 - 1)^3 = (t^2 - 1)^2 [(t^2 - 1) - (t^2 - 1)] = 0 \quad \forall t \in \mathbb{C}.$$

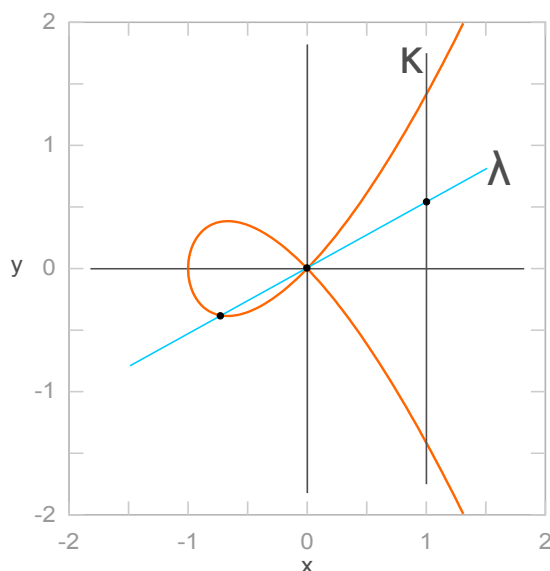
Navyše pre úplnosť ukážeme, že takto vieme popísať všetky body  $(x, y) \in \mathcal{C}$ :

$$\begin{aligned} y^2 &= x^2(1 + x) \\ \left(\frac{y}{x}\right)^2 &= 1 + x \end{aligned}$$

Zvoľme si pre  $x \neq 0$  substitúciu  $\frac{y}{x} =: t$ , pomocou ktorej získame predpis pre  $x = \frac{y}{t}$ . Overme, že  $\varphi(t) = (x, y) \in \mathcal{C}$ :

$$\begin{aligned} t^2 &= \left(1 + \frac{y}{t}\right) \\ t(t^2 - 1) &= y \\ t^2 - 1 &= x \quad \forall t \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Pre  $x = 0$  dosadíme  $t = 1$ , resp.  $t = -1$ . V oboch prípadoch platí, že  $\varphi(t) = (0, 0) \in \mathcal{C}$ .



Obrázok 3.1: Kubická krivka  $\mathcal{C} : f(x, y) = y^2 - x^2 - x^3$  má parametrizáciu  $\varphi : t \mapsto (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$ .

Uveďme si ešte jeden príklad, konkrétne parametrizáciu kružnice metódou *stereografickej projekcie*.

**Príklad 3.3:** Uvažujme jednotkovú kružnicu  $\mathcal{C} : f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ .

Urobme podobnú konštrukciu ako pri kubickej krivke z pr. 3.2, priamku však nechajme prechádzať bodom  $(-1, 0) \in \mathcal{C}$  a nie počiatkom.

Smernicová rovnica priamky je

$$\lambda : y = t(x + 1), \quad t \in \mathbb{C}$$

Odtiaľ prienik  $\lambda \cap \mathcal{C}$  vypočítame nasledovne:

$$\begin{aligned} \lambda : y &= t(x + 1) \\ \mathcal{C} : y^2 &= 1 - x^2 \end{aligned}$$

a

$$\lambda \cap \mathcal{C} : \left. \begin{aligned} t^2(x + 1)^2 &= 1 - x^2 \\ (x + 1)[t^2(x + 1) + (x - 1)] &= 0 \\ (x + 1)[x(1 + t^2) + t^2 - 1] &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x \in \left\{ -1, \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right\}$$

Dopočítajme  $y$ .

Pre  $x = -1$  máme z rovnice priamky  $y = 0$ , čo je očakávaný výsledok, pretože priamky sme úmyselne volili tak, aby týmto bodom krivky  $\mathcal{C}$  prechádzali. Zaujímavý je preto druhý bod prieniku, pre ktorý platí

$$y = t(x + 1) = t \left( \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + 1 \right) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

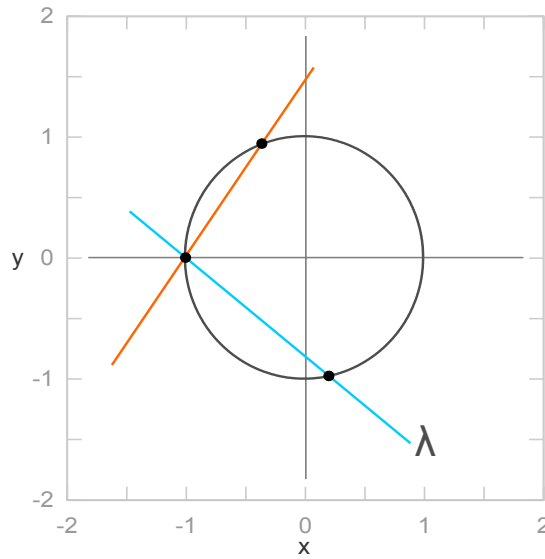
Získavame parametrizáciu kružnice

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : t \mapsto \left( \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2} \right), \quad t \in \mathbb{C}$$

správnosť dokážeme dosadením.

Pri overovaní, či  $\forall (x, y) \in \mathcal{C}$  vieme takto vyjadriť, narazíme na problém: pre bod  $(-1, 0)$  to nie je možné – nevieme nájsť také  $t \in \mathbb{C}$ , aby  $\varphi(t) = (-1, 0)$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{1 - t^2}{1 + t^2} = -1 \right) &\wedge \left( \frac{2t}{1 + t^2} = 0 \right) \\ (1 - t^2 = -1 - t^2) &\wedge (2t = 0) \\ (2 = 0) &\wedge (t = 0) \quad \text{nikdy!} \end{aligned}$$



Obrázok 3.2: Jednotková kružnica  $\mathcal{C} : f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  má parametrizáciu  $\varphi : t \mapsto \left( \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$  pri stereograf. pr. z  $(-1, 0)$ .

Ukázali sme si niekoľko kriviek a ich parametrizácií: pri priamke sme  $\varphi$  vedeli odhadnúť hneď (pr. 3.1), v prípade singularnej kubickej krivky (pr. 3.2) sme ho práce skonštruovali. Kružnica (pr. 3.3) nás prekvapila predpisom, ktorý okrem toho, že nepopisoval krivku celú, navyše nebol polynomický.

Všetky naše pozorovania nás privádzajú k zisteniu, že naša predbežná definícia parametrizácie zo začiatku kapitoly je príliš striktná. Potrebujeme takú, ktorá bude zodpovedať našim očakávaniam a pritom bude dostatočne flexibilná.

Ukazuje sa, že takýmto užitočným nástrojom sú *racionálne funkcie*.

**Definícia 3.1 (Racionálna funkcia):** Funkcia  $f(x_1, \dots, x_n)$  je *racionálna*, ak ju vieme vyjadriť ako  $f(x_1, \dots, x_n) = \frac{p(x_1, \dots, x_n)}{q(x_1, \dots, x_n)}$ , pričom  $p(x_1, \dots, x_n), q(x_1, \dots, x_n)$  sú polynómy nad poľom  $\mathbb{C}$  v premenných  $x_1, \dots, x_n$  a  $q(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ .

Navyše

$$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \iff pq' - p'q = 0.$$

**Poznámka:** Odteraz budeme polynómy nad poľom  $\mathbb{C}$  v premenných  $x_1, \dots, x_n$  označovať  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ , racionálne funkcie nad  $\mathbb{C}$  v  $x_1, \dots, x_n$  budeme označovať  $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$ .

Pretože racionálna funkcia je *podiel* polynómov, môže sa stať, že pre niektoré hodnoty nie je definovaná. Konkrétne sú to tie hodnoty, kde menovateľ nadobúda hodnotu 0.

**Definícia 3.2 (Definičný obor racionálnej funkcie):** Uvažujme racionálnu funkciu  $f(x_1, \dots, x_n) = \frac{p(x_1, \dots, x_n)}{q(x_1, \dots, x_n)}$ . *Definičným oborom*  $f(x_1, \dots, x_n)$  nazveme hustú otvorenú množinu

$$\text{dom } f(x_1, \dots, x_n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid q(x_1, \dots, x_n) \neq 0\}.$$

**Definícia 3.3 (Obor hodnôt racionálnej funkcie):** Uvažujme racionálnu funkciu  $f(x_1, \dots, x_n)$ . *Oborom hodnôt*  $f(x_1, \dots, x_n)$  nazveme množinu

$$\text{range } f(x_1, \dots, x_n) = \{y \in \mathbb{C} \mid \exists (x_1, \dots, x_n) \in \text{dom } f(x_1, \dots, x_n) : f(x_1, \dots, x_n) = y\}.$$

**Definícia 3.4 (Graf racionálnej funkcie):** Uvažujme racionálnu funkciu  $f(x_1, \dots, x_n)$ . *Grafom funkcie*  $f$  nazveme množinu

$$\Gamma_f = \{(x_1, \dots, x_n, y) \mid (x_1, \dots, x_n) \in \text{dom } f(x_1, \dots, x_n) \wedge y = f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

**Definícia 3.5 (Racionálna krivka):** Krivku  $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$  nazveme *racionálnou*, ak existuje  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)); \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{C}(t)$ , že

1. až na konečný počet výnimiek je pre  $t \in \mathbb{C}$  bod  $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$  definovaný a leží na krivke.
2. až na konečný počet výnimiek je každý bod krivky obrazom nejakého  $t \in \mathbb{C}$ .

Navyše, k  $\varphi_2(t)$  musí existovať inverzné zobrazenie  $\psi(x, y)$

$$\psi(x, y) : (x, y) \longmapsto t$$

také, že

$$\begin{aligned} \varphi \circ \psi &= \text{id}_{\mathbb{C}_2} \\ \psi \circ \varphi &= \text{id}_{\mathbb{C}_1} \end{aligned}$$

**Poznámka:** Predchádzajúca definícia nám hovorí, kedy je krivka parametrizovateľná.

**Príklad 3.4:** Zoberme krivku so singularitou v počiatku z pr. 3.2 zadanú parametricky ako  $\varphi(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$ .

Uvažujme zobrazenie  $\psi(x, y) = \frac{y}{x}$ . Zobrazenie je definované vždy okrem situácie, kedy

$$t^2 - 1 = 0 \iff t = \pm 1.$$

Korektnosť  $\psi(x, y)$  overíme dosadením:

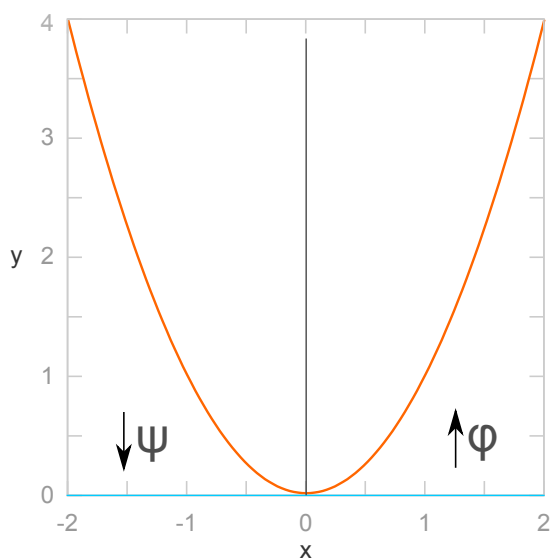
$$t \xrightarrow{\varphi} (t^2 - 1, t(t^2 - 1)) \xrightarrow{\psi} t.$$

**Príklad 3.5:** Uvažujme *parabolu*  $\mathcal{C}$  zadanú parametricky ako  $\varphi : t \mapsto (t, t^2) = (x, y)$ .

Overíme, že  $\varphi$  je naozaj parametrizáciou – dosadením, alebo intuitívne, keď si predstavíme, že “dvíhame” os  $\vec{x}$  na parabolu.

Teraz nájdime inverzné zobrazenie – chceme, aby platilo  $\psi_1(x, y) = t$ . Na to stačí premietnuť parabolu späť na os. Odtiaľto máme  $\psi_1 : (x, y) \mapsto x$ . Jednoducho overíme, že takto definované  $\psi$  je naozaj inverzným zobrazením.

Skúsme však uvažovať  $\psi_2(x, y) = \frac{y}{x}$ . Po dosadení opäť máme  $\psi_2(x, y) = t$ . Narozdiel od  $\psi_1$  však  $\psi_2$  nie je definované všade.



Obrázok 3.3: Parabola  $\mathcal{C} : f(x, y) = y - x^2$  má param.  $\varphi : t \mapsto (t, t^2)$ .

Ukázali sme si, že inverzné zobrazenie nemusí byť určené jednoznačne, no nasledujúce definície nám hovoria, že sa líšia iba na prvý pohľad.

**Definícia 3.6 (Regulárna a racionálna funkcia na krivke):** Uvažujme krivku  $\mathcal{C}$  a funkciu  $\varphi : \mathcal{C} \mapsto \mathbb{C}$ . Ak  $\exists f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  ( $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$ ) také, že  $\varphi(P) = f(P) \forall P \in \mathcal{C}$ , potom  $\varphi$  nazveme *regulárnou (racionálnou) funkciou na  $\mathcal{C}$* .

**Definícia 3.7 (Súradnicový okruh krivky, množina rac. funkcií na krivke):** Uvažujme krivku  $\mathcal{C}$ . Množina všetkých regulárnych funkcií na  $\mathcal{C}$  je

$$\mathbb{C}[\mathcal{C}] = \{f \mid f \text{ je regulárna na } \mathcal{C}\}$$

a nazývame ju *súradnicový okruh krivky  $\mathcal{C}$* .

*Množina racionálnych funkcií na krivke  $\mathcal{C}$  je*

$$\mathbb{C}(\mathcal{C}) = \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in \mathbb{C}[\mathcal{C}] \wedge g \text{ je nenulový na otvorenej podmnožine } \mathcal{C} \right\},$$

pričom

$$\frac{f}{g} = \frac{f'}{g'} \iff fg' - f'g \equiv 0 \text{ na } \mathcal{C}.$$

**Poznámka:** Podmienkou, že nejaký polynóm je “identicky rovný 0 na  $\mathcal{C}$ ” máme na mysli, že tento je násobkom polynómu, ktorý definuje krivku. Definujúci polynóm krivky je “nulou na  $\mathcal{C}$ ”, lebo všetky body krivky po dosadení dávajú nulu.

Teda (regulárne alebo racionálne) funkcie, ktoré sa na našej krivke (resp. všade tam, kde sú na nej definované) správajú rovnako, sú pre nás totožné. Správanie funkcií mimo krivky nás nezaujíma.

Vráťme sa k predchádzajúcemu príkladu, kde sme našli dve rôzne inverzné zobrazenia parametrizácie paraboly:  $\psi_1(x, y) = x$  a  $\psi_2(x, y) = \frac{y}{x}$ . Povedali sme si, že sú rôzne iba zdanlivo – teraz si ukážeme, že patria do  $\mathbb{C}(\mathcal{C})$ :

$$\left( \psi_1(x, y) = \psi_2(x, y) \right) \iff \left( \frac{x}{1} = \frac{y}{x} \right) \iff \left( x^2 - y = 0 \right)$$

Pretože parabolu máme zadanú ako  $\mathcal{C} : f(x, y) = y - x^2$ , čiže  $f(x, y)$  je nula na  $\mathcal{C}$ , tvrdenie platí.

## 3.2 Izomorfizmy a biracionálne zobrazenia

V predchádzajúcej časti sme sa na zobrazenie  $\varphi$  pozerali ako na zobrazenie medzi dvoma priestormi, ktoré parametru  $t$  priradilo bod  $(x, y)$  v rovine:

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbb{C}^1 &\rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{C}) \\ t &\rightarrow (x, y) \quad \text{kde } (x, y) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))\end{aligned}$$

Pri parametrizácii paraboly (pr. ??) sme si pri konštrukcii zobrazenia  $\varphi$  pomohli predstavou, že “dvíhame” os  $\vec{x}$  na parabolu. Na  $\mathbb{C}^1$  sme sa teda nepozerali ako na jednorozmerný priestor parametrov  $t$ , ale ako na priamku v rovine. Prirodzene preto vyvstáva otázka, či môžeme definovať zobrazenie medzi ľubovoľnými krivkami, nielen medzi priamkou a inou krivkou (parametrizáciu) a ak áno, za akých okolností.

**Definícia 3.8 (Racionálne zobrazenie):** Majme krivky  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ . Zobrazenie  $\varphi(x, y) : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$  sa nazýva *racionálne*, ak existujú racionálne funkcie  $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)$  definované na hustej otvorenej podmnožine  $\mathcal{C}_1$  také, že všade, kde sú definované, platí  $\varphi(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$ .

Rovnosť (totožnosť) dvoch racionálnych zobrazení definujeme podobne ako v prípade racionálnych funkcií.

**Definícia 3.9 (Regulárne zobrazenie (morfizmus)):** Ak obe zobrazenia  $\varphi_1(x, y)$  a  $\varphi_2(x, y)$  z predchádzajúcej definície sú polynómy,  $\varphi(x, y)$  nazývame *regulárne zobrazenie* alebo *morfizmus*.

**Definícia 3.10 (Dominantné zobrazenie):** Uvažujme racionálne zobrazenie  $\varphi(x, y) : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ . Ak  $\varphi(\mathcal{C}_1)$  je hustá v  $\mathcal{C}_2$ ,  $\varphi$  nazveme *dominantné*.

Predchádzajúca definícia dominantného zobrazenia veľmi pripomína definíciu surjektívnosti. Pretože však uvažujeme  $\varphi$  racionálne, toto nemusí byť definované všade. Preto mu umožňujeme niektoré hodnoty nenadobúdať, avšak vyžadujeme, aby ich nebolo “priveľa”. Čo to znamená?

Biracionálne zobrazenia možno definovať i v priestoroch s vyššou dimenziou a/alebo na zložitejších objektoch ako sú krivky. Tam sa lepšie ukáže, prečo dominantné zobrazenia definujeme práve cez husté množiny: napr. pri plochách sa môže stať, že



zobrazenie nie je definované na celej krivke, nielen iba na konečnej množine bodov. Pretože plocha bez jednej krivky tvorí hustú množinu, zobrazenie je stále racionálne – hoci je nedefinované na nekonečnej množine.

Pri parametrizácii sme sa pýtali, ako vyzerá inverzné zobrazenie k  $\varphi$ . Táto otázka je namieste i teraz.

**Príklad 3.6:** Uvažujme kružnicu  $\mathcal{C} : f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . Metódou stereografickej projekcie z bodu  $(-1, 0)$  sme v pr. 3.3 skonštruovali parametrizáciu  $\varphi(t) = \left( \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$ . Ak sa však  $\varphi$  pozrieme ako na zobrazenie medzi krivkami v afinnej rovine, získame predpis

$$\varphi(x, y) : (x, 0) \mapsto \left( \frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{2x}{1+x^2} \right)$$

ktorého správnosť overíme dosadením:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^2 + \left( \frac{2x}{1+x^2} \right)^2 - 1 = \\ &= \frac{(1-x^2)^2 + (2x)^2 - (1+x^2)^2}{(1+x^2)^2} = \frac{0}{(1+x^2)^2} = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathcal{C} \end{aligned}$$

Pri definícii racionálnej krivky sme však požadovali i existenciu inverzného zobrazenia, ktoré kružnicu zobrazí späť na priamku. Pretože vieme skonštruovať zobrazenie

$$\psi(x, y) : (x, y) \mapsto \left( \frac{1-x}{y}, 0 \right)$$

a platí, že

$$\begin{aligned} (x, 0) &\xrightarrow{\varphi} \left( \frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{2x}{1+x^2} \right) \xrightarrow{\psi} (x, 0) \\ (x, y) &\xrightarrow{\psi} \left( \frac{1-x}{y}, 0 \right) \xrightarrow{\varphi} (x, y), \end{aligned}$$

kružnica je naozaj racionálnou krivkou.

**Príklad 3.7:** Uvažujme parabolou  $\mathcal{C} : f(x, y) = y - x^2$ .

Predstavu o “dvíhaní” osi  $\overleftrightarrow{x}$  (priamky) môžeme popísať morfizmom  $\varphi(x, y)$  ako

$$\varphi(x, y) : (x, 0) \rightarrow (x, x^2)$$

Inverzné zobrazenie  $\psi(x, y)$  je premietaním na os  $\vec{x}$ , teda “zabúdaním” druhej súradnice

$$\psi(x, y) : (x, y) \rightarrow (x, 0)$$

a naozaj platí

$$(x, 0) \xrightarrow{\varphi} (x, x^2) \xrightarrow{\psi} (x, 0)$$

Preto  $\psi(x, y)$  je morfomom paraboly a osi  $\vec{x}$ .

Predchádzajúce dva príklady naznačujú, že medzi krivkami  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  môže existovať obojstranný vzťah: vieme nájsť zobrazenie, ktoré transformuje  $\mathcal{C}_1$  na  $\mathcal{C}_2$  a iné, ktoré zobrazuje  $\mathcal{C}_2$  na  $\mathcal{C}_1$ .

**Definícia 3.11 (Biracionálne zobrazenie):** Majme krivky  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ . Racionálne zobrazenie  $\varphi(x, y) : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$  sa nazýva *biracionálne*, ak existuje racionálne inverzné zobrazenie  $\psi(x, y) : \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1$  a všade tam, kde sú  $\varphi(x, y), \psi(x, y)$  definované, platí:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) \circ \psi(x, y) &= \text{id}_{\mathcal{C}_2} \\ \psi(x, y) \circ \varphi(x, y) &= \text{id}_{\mathcal{C}_1}\end{aligned}$$

Ak je zobrazenie  $\varphi(x, y)$  biracionálne, krivky  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  nazývame *biracionálne ekvivalentné*.

**Poznámka:** Kružnica v zobrazení  $\varphi(x, y)$  z pr. 3.6 je biracionálne ekvivalentná s osou  $\vec{x}$ .

**Definícia 3.12 (Izomorfizmus):** Majme krivky  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ . Regulárne zobrazenie  $\varphi(x, y) : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$  je *izomorfizmus*, ak existuje regulárne inverzné zobrazenie  $\psi(x, y) : \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1$  a platí:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) \circ \psi(x, y) &= \text{id}_{\mathcal{C}_2} \\ \psi(x, y) \circ \varphi(x, y) &= \text{id}_{\mathcal{C}_1}\end{aligned}$$

Ak je zobrazenie  $\varphi(x, y)$  izomorfizmus, krivky  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  nazývame *izomorfné*.

**Poznámka:** Parabola v zobrazení  $\varphi(x, y)$  z pr. 3.7 je izomorfná s osou  $\vec{x}$ .

Vidíme, že krivky možno rozdeliť do skupín, kde v rámci jednej skupiny sú krivky navzájom biracionálne ekvivalentné. Navyše platí nasledujúca veta.

**Veta 3.1:** *Dominantné biracionálne zobrazenia definujú reláciu ekvivalencie “ $\sim$ ” na množine rovinných kriviek.*

**Dôkaz:** Uvažujme krivky  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ .

1. Relácia je *reflexívna*, pretože  $\mathcal{C}_1 \sim \mathcal{C}_1$  platí pre identické zobrazenie

$$\begin{aligned} \text{id}_{\mathcal{C}_1} : \mathcal{C}_1 &\rightarrow \mathcal{C}_1 \\ (x, y) &\rightarrow (x, y) \end{aligned}$$

ktoré je nielen biracionálne, ale i bijektívne a všade definované, teda je izomorfizmom.

2. Relácia  $\sim$  je *symetrická*, ak

$$(\mathcal{C}_1 \sim \mathcal{C}_2) \Rightarrow (\mathcal{C}_2 \sim \mathcal{C}_1).$$

Pretože  $\mathcal{C}_1 \sim \mathcal{C}_2$ , existujú také zobrazenia

$$\begin{aligned} \varphi_{12} : \mathcal{C}_1 &\rightarrow \mathcal{C}_2 \\ \psi_{21} : \mathcal{C}_2 &\rightarrow \mathcal{C}_1 \end{aligned}$$

že sú racionálne a navzájom inverzné. Preto môžeme zvoliť

$$\begin{aligned} \varphi_{21} : \mathcal{C}_2 &\rightarrow \mathcal{C}_1, \quad \varphi_{21} \equiv \psi_{21} \\ \psi_{12} : \mathcal{C}_1 &\rightarrow \mathcal{C}_2, \quad \psi_{12} \equiv \varphi_{12} \end{aligned}$$

čím získavame  $\mathcal{C}_2 \sim \mathcal{C}_1$ .

3. Požiadavku *tranzitívnosti* relácie  $\sim$  môžeme formálne definovať ako platnosť tvrdenia

$$(\mathcal{C}_1 \sim \mathcal{C}_2) \wedge (\mathcal{C}_2 \sim \mathcal{C}_3) \Rightarrow (\mathcal{C}_1 \sim \mathcal{C}_3).$$

Pretože  $\mathcal{C}_1 \sim \mathcal{C}_2$  a  $\mathcal{C}_2 \sim \mathcal{C}_3$ , existujú racionálne navzájom inverzné zobrazenia

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{12} : \mathcal{C}_1 &\rightarrow \mathcal{C}_2 & \text{a} & \varphi_{23} : \mathcal{C}_2 &\rightarrow \mathcal{C}_3 \\ \psi_{21} : \mathcal{C}_2 &\rightarrow \mathcal{C}_1 & & \psi_{32} : \mathcal{C}_3 &\rightarrow \mathcal{C}_2 \end{array}$$

také, že

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{12} \circ \psi_{21} &= \text{id}_{\mathcal{C}_2} & \text{a} & \varphi_{23} \circ \psi_{32} &= \text{id}_{\mathcal{C}_3} \\ \psi_{21} \circ \varphi_{12} &= \text{id}_{\mathcal{C}_1} & & \psi_{32} \circ \varphi_{23} &= \text{id}_{\mathcal{C}_2} \end{array}$$

Zobrazenia

$$\begin{aligned} \varphi_{13} &= \varphi_{23} \circ \varphi_{12} \\ \psi_{31} &= \psi_{21} \circ \psi_{32} \end{aligned}$$

existujú, pretože z predpokladu vety uvažujeme dominantné zobrazenia, čo nám ich umožňuje skladať. Obe  $\varphi_{13}, \psi_{31}$  sú racionálne, pretože vznikli zložením racionálnych zobrazení, a hneď uvidíme, že sú i navzájom inverzné, preto  $\varphi_{13}$  je biracionálne. Stačí dokázať platnosť

$$\begin{aligned}\varphi_{13} \circ \psi_{31} &= \text{id}_{\mathcal{C}_3} \\ \psi_{31} \circ \varphi_{13} &= \text{id}_{\mathcal{C}_1},\end{aligned}$$

na čo stačí obyčajné dosadenie:

$$\begin{aligned}\varphi_{13} \circ \psi_{31} &= (\varphi_{23} \circ \varphi_{12}) \circ (\psi_{21} \circ \psi_{32}) \stackrel{\text{asoc.}}{=} \varphi_{23} \circ (\varphi_{12} \circ \psi_{21}) \circ \psi_{32} = \\ &= \varphi_{23} \circ \text{id}_{\mathcal{C}_2} \circ \psi_{32} = \varphi_{23} \circ \psi_{32} = \text{id}_{\mathcal{C}_3} \\ \psi_{31} \circ \varphi_{13} &= (\psi_{21} \circ \psi_{32}) \circ (\varphi_{23} \circ \varphi_{12}) \stackrel{\text{asoc.}}{=} \psi_{21} \circ (\psi_{32} \circ \varphi_{23}) \circ \varphi_{12} = \\ &= \psi_{21} \circ \text{id}_{\mathcal{C}_2} \circ \varphi_{12} = \psi_{21} \circ \varphi_{12} = \text{id}_{\mathcal{C}_1}\end{aligned}$$

Relácia  $\sim$  je naozaj tranzitívna.

Ukázali sme reflexívnosť, symetriu a tranzitívnosť relácie  $\sim$ , preto táto je ekvivalenciou.

Q.E.D.  $\square$

### 3.3 Rozklad singularity

Predchádzajúcu časť kapitoly sme ukončili vetou, podľa ktorej možno na základe relácie “ $\sim$ ” rovinné krivky rozdeliť do tried, kde potom v rámci tej-ktorej triedy krivky v určitom zmysle nerozlišujeme – čiže krivky možno za určitých okolností “nahradiť” inými, pričom sa nič zlé nestane. Vynára sa zaujímavé zistenie: vieme si zjednodušiť prácu so singulárnymi krivkami - stačí, ak nájdeme ich biracionálne ekvivalenty bez singularít, alebo so singularitami, ktoré sú “krajšie” či “jednoduchšie”.

Ako však takúto biracionálne ekvivalentnú krivku nájsť? A ako vyzerá operácia, ktoré nám toto všetko umožňuje?

**Definícia 3.13 (Rozklad singularity):** Uvažujme singulárnu rovinnú krivku  $\mathcal{C}_1$ . Dvojicu  $(\mathcal{C}_2, \varphi(x, y))$  nazveme *rozkladom singularity*, ak  $\mathcal{C}_2$  je regulárna rovinná krivka a  $\varphi(x, y) : \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1$  je biracionálne zobrazenie kriviek  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ .

**Príklad 3.8:** Veľmi jednoduchým a nám už známym príkladom rozkladu singularity je parametrizácia. Vtedy je krivka biracionálne ekvivalentná s priamkou (pozri pr. 3.4, pr. 3.6).

### 3.3.1 Rozdutie roviny

Rozdutie roviny sa dá krátko definovať ako konštrukcia plochy  $\mathcal{B} \subset \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$  biracionálne ekvivalentnej s rovinou  $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ . Je však dôležité si uvedomiť, že pri ploche sa môže stať, že je nedefinovaná na nekonečne veľkej množine – napr. na nejakej krivke.

Uvažujme rovinu  $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$  a počiatok súradníc  $P = (0, 0)$ . Využime fakt, že ľubovoľný bod roviny leží na nejakej priamke prechádzajúcej  $P$ , a pokúsme sa vytvoriť hľadanú plochu nasledovne: pre každý bod rozhodneme, na ktorej priamke leží, a potom ho podľa toho vhodne zobrazme.

Ukazuje sa, že vhodným klasifikátorom bodu je smernica priamky  $\kappa \in \mathbb{C}$ , pretože toto číslo danú priamku (a teda i všetky jej body) popisuje jednoznačne. Máme

$$y = \kappa x \quad \implies \quad \kappa = \frac{y}{x}$$

Teraz každý bod transformujme tak, že ho “zdvihneme” v kolmom smere o  $\kappa$ , čím vytvoríme množinu  $\mathcal{G}$ .

Dostávame sa k prvému problému: nie všetky body roviny vieme takto spracovať, pretože nie vždy vieme  $\kappa$  vypočítať. Problémové sú body, pre ktoré  $x = 0$  – body na osi  $\vec{y}$ . Tieto musíme vynechať.

Pretože našou snahou je nájsť biracionálne ekvivalentnú *plochu*, body  $\mathcal{G}$  nám nestačia (potrebujeme množinu bodov popísanú polynómom, a nie racionálnou funkciou). Vytvoríme preto nadmnožinu  $\mathcal{B} \supset \mathcal{G}$ , ktorá už plochou bude, a pritom bude najmenšia možná: postačí, ak bod  $(0, 0)$  nahradíme priamkou  $\vec{z} = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{C}\}$ .

Teraz si predchádzajúci slovný postup sformalizujeme:

1. *Konštrukcia množiny  $\mathcal{G}$ :*

Zostavme racionálnu funkciu

$$g(x, y) = \frac{y}{x},$$

ktorá má definičný obor

$$\gamma := \text{dom } g = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C}) \mid x \neq 0\}$$

a graf

$$\mathcal{G} := \Gamma_g = \{(x, y, z) \mid y = xz \wedge x \neq 0\} \subsetneq \gamma \times \mathbb{A}^1(\mathbb{C}) \subsetneq \mathbb{A}^2(\mathbb{C}) \times \mathbb{A}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{A}^3(\mathbb{C}).$$

## 2. Konštrukcia plochy $\mathcal{B}$ :

Ďalej majme množinu bodov

$$\mathcal{B} = \{(x, y, z) \mid y = xz\} \subsetneq \mathbb{A}^3(\mathbb{C}),$$

pre ktorú zjavne platí  $\mathcal{G} \subsetneq \mathcal{B}$ .

## 3. Presný popis plochy $\mathcal{B}$ :

Uvažujme morfizmus

$$\begin{aligned} \pi_z : \mathbb{A}^3(\mathbb{C}) &\longmapsto \mathbb{A}^2(\mathbb{C}) \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y) \end{aligned}$$

Pri reštrikcii definičného oboru  $\pi_z$  z možného  $\mathbb{A}^3(\mathbb{C})$  iba na  $\mathcal{B} \subsetneq \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$  máme

$$\pi_z(\mathcal{B}) = \gamma \cup \{P\}$$

a pre  $\pi_z^{-1}$  platí

$$\left. \begin{aligned} \pi_z^{-1}(P) &= \vec{z} = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{C}\} \\ \pi_z^{-1}(\gamma) &= \mathcal{G} \end{aligned} \right\} \implies \pi_z^{-1}(\{P\} \cup \gamma) = \vec{z} \cup \mathcal{G} = \mathcal{B}$$

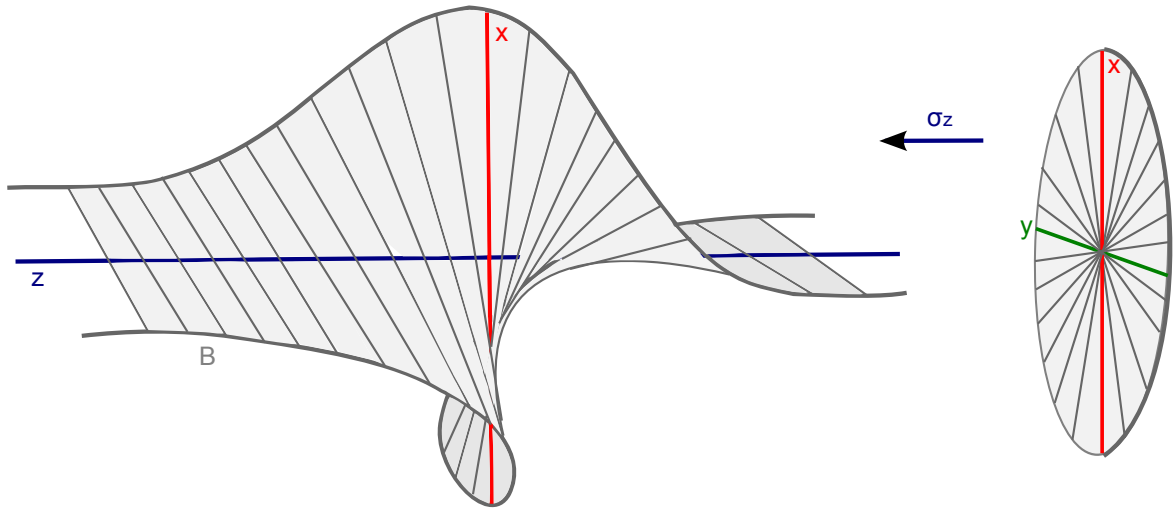
Takto skonštruovanú plochu  $\mathcal{B}$  nazývame *rozduťím roviny v bode*  $(0, 0)$ .

Označme inverzné zobrazenie k  $\pi_z$  ako  $\sigma_z$ . Potom  $\mathcal{B}$  je biracionálne ekvivalentná s rovinou, pretože

$$\begin{aligned} \sigma_z(x, y) : \mathbb{A}^2(\mathbb{C}) &\longmapsto \mathcal{B} & \pi_z(x, y, z) : \mathcal{B} &\longmapsto \mathbb{A}^2(\mathbb{C}) \\ (x, y) &\longmapsto \left(x, y, \frac{y}{x}\right) & \text{a} & & (x, y, z) &\longmapsto (x, y) \end{aligned}$$

sú racionálne a navzájom inverzné:

$$\begin{aligned} (x, y) &\xrightarrow{\sigma_z} \left(x, y, \frac{y}{x}\right) \xrightarrow{\pi_z} (x, y) \\ (x, y, z) &\xrightarrow{\pi_z} (x, y) \xrightarrow{\sigma_z} \left(x, y, \frac{y}{x}\right) = (x, y, z) \iff (y = xz) \text{ na } \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Obrázok 3.4: Rozdutie roviny v bode  $(0, 0)$ .

### 3.3.2 Odstránenie singularity

Uvažujme singulárnu krivku  $\mathcal{C}_z$ . Upravme sústavu súradníc tak, aby sa singulárny bod krivky nachádzal v počiatku (vhodným posunutím), a zároveň aby os  $\vec{y}$  nebola dotyčnicou v  $P$  (vhodným otočením). Vytvoríme plochu  $\mathcal{B}$  a označme ju  $f(x, y, z) = xz - y$ .

Ukázali sme si, že rozdutie je biracionálne, pretože ho vieme popísať dvojicou racionálnych zobrazení  $(\sigma_z, \pi_z)$ , ktoré sú navzájom inverzné. Krivka  $\mathcal{C}_z \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$  sa preto transformuje na novú priestorovú krivku  $\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \subset \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$ . Pretože singulárny bod  $P \in \mathcal{C}_z$  sa nachádza v počiatku, v rozduťí bude nahradený osou  $\vec{z}$ ; do množiny  $\mathcal{C} \cap \vec{z}$  budú patriť body, ktoré zodpovedajú smerom dotyčníc v  $P$ .

Zobrazenie  $\pi_z$  bolo premietaním  $\mathcal{B}$  do roviny  $z = 0$ , čo pre  $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$  znamenalo, že sa zobrazí na  $\mathcal{C}_z = \pi_z(\mathcal{C})$ . Skúsme sa pozrieť, čo sa stane, ak si vyberieme inú rovinu premietania, konkrétne rovinu  $y = 0$ .

Definujme premietanie do roviny  $y = 0$  ako

$$\left. \begin{array}{l} \pi_y(x, y, z) : \quad \mathcal{B} \quad \longmapsto \quad \mathbb{A}^2(\mathbb{C}) \\ \quad \quad \quad \quad (x, y, z) \longmapsto \quad (x, z) \end{array} \right\} \implies \pi_y(\mathcal{C}) =: \mathcal{C}_y \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$$

Na to, aby platilo  $\mathcal{C}_z \sim \mathcal{C}_y$ , potrebujeme ešte definovať  $\sigma_y(x, y, z)$  tak, aby  $\sigma_y, \pi_y$  boli navzájom inverzné.

Pretože  $\pi_y$  bolo premietaním, stačí nám dourčiť jednu súradnicu  $w$  tak, aby  $\sigma_y$  malo predpis

$$\begin{array}{ccc} \sigma_y(x, z) : \mathbb{A}^2(\mathbb{C}) & \longmapsto & \mathcal{B} \\ (x, z) & \longmapsto & (x, w, z) \end{array} \quad \text{a platilo} \quad \begin{array}{l} \pi_y \circ \sigma_y = \text{id}_{\mathcal{C}_y} \\ \sigma_y \circ \pi_y = \text{id}_{\mathcal{C}} \end{array}$$

Na určenie  $w$  si stačí uvedomiť, že  $\sigma_y(\mathcal{C}_y) \subset \mathcal{B} : f(x, y, z) = xz - y$ . Pretože  $w = y$ , máme  $w = xz$  a teda i celý predpis  $\sigma_y$ .

Napokon overme  $\mathcal{C} \sim \mathcal{C}_y$ . Zobrazenie  $\sigma_y$  je racionálne, preto stačí ukázať, že je inverzné k  $\pi_y$ :

$$\begin{array}{ccccc} (x, y, z) & \xrightarrow{\pi_y} & (x, z) & \xrightarrow{\sigma_y} & (x, xz, z) = (x, y, z) \iff (y = xz) \\ (x, z) & \xrightarrow{\sigma_y} & (x, xz, z) & \xrightarrow{\pi_y} & (x, z) \end{array}$$

Máme  $\mathcal{C}_z \sim \mathcal{C}$  a  $\mathcal{C} \sim \mathcal{C}_y$ . Vo vete 3.1 sme dokázali, že relácia “ $\sim$ ” je tranzitívna. Pre nás to znamená, že ak krivku  $\mathcal{C}$  zobrazíme biracionálne na ďalšiu krivku, pôvodná  $\mathcal{C}_z$  bude aj s touto novou krivkou vo vzťahu  $\sim$ . Preto  $\mathcal{C}_z \sim \mathcal{C}_y$ .

Všetky uvažované zobrazenia sú dominantné, preto konečný predpis transformácie  $\sigma : \mathcal{C}_y \longmapsto \mathcal{C}_z$  vieme vyskladať ako

$$(x, y) \xrightarrow{\sigma_y} (x, xy, y) \xrightarrow{\pi_z} (x, xy).$$

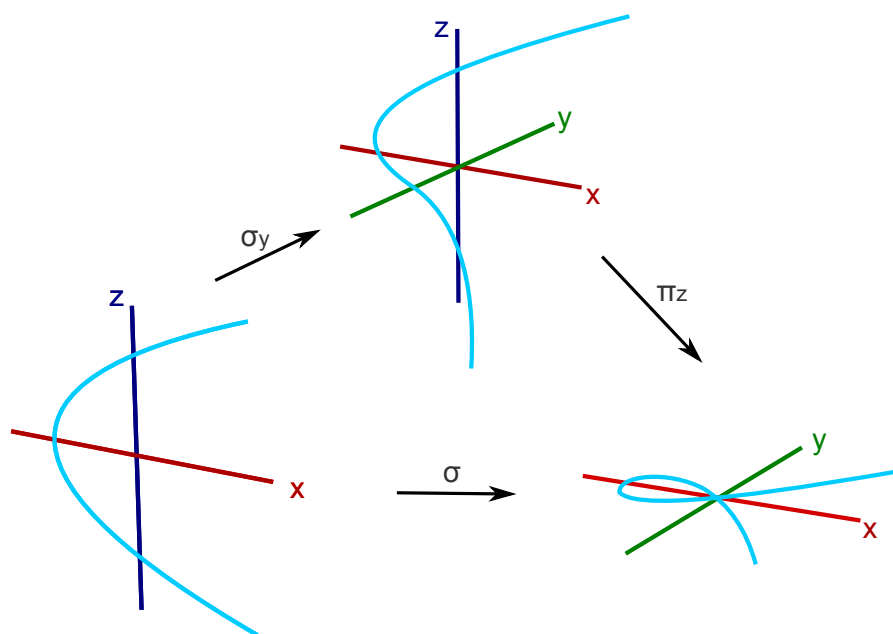
Odtiaľ máme

$$\begin{array}{ccc} \sigma = (\sigma_1, \sigma_2) = \pi_z \circ \sigma_y : \mathcal{C}_y \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C}) & \longmapsto & \mathcal{C}_z \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C}) \\ (x, y) & \longmapsto & (x, xy) \end{array}$$

Predpis krivky  $\mathcal{C}_y$  získame dosadením transformácie  $\sigma$  do predpisu  $\mathcal{C}_z$ :

$$f(\sigma(x, y)) = f(\sigma_1(x, y), \sigma_2(x, y)) = f(x, xy)$$





Obrázok 3.5: Rozklad singularity metódou rozdutia roviny v bode.

V nasledujúcich príkladoch použijeme  $\sigma$  na rozklad niektorých známych singularít.

**Príklad 3.9:** Uvažujme našu známu kubickú krivku  $\mathcal{C} : f(x, y) = y^2 - x^2 - x^3$ .

Jednoduchým overením zistíme, že v bode  $(0, 0)$  sa nachádza singularita:

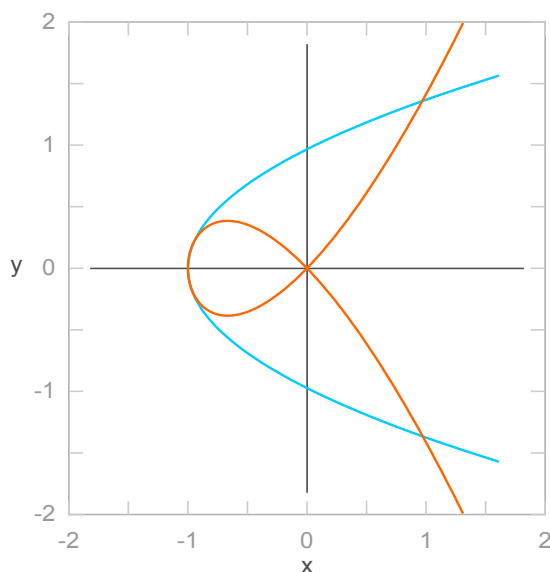
$$\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) = 0.$$

Pretože os  $\vec{y}$  nie je dotyčnicou v bode  $(0, 0)$ , môžeme sa pokúsiť pomocou zobrazenia  $\sigma$  singularitu rozložiť:

$$\begin{aligned} \sigma(x, y) : \quad \mathcal{C}_\sigma &\longmapsto \mathcal{C} \\ \sigma(x, y) : \quad (x, y) &\longmapsto (x, xy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_\sigma(x, y) &= f(\sigma(x, y)) = f(\sigma_1(x, y), \sigma_2(x, y)) = \\ &= f(x, xy) = (xy)^2 - x^2 - x^3 = x^2[y^2 - 1 - x] \end{aligned}$$

Vznikli nám dve krivky: priamka  $x^2 = 0$  (dvojnásobná os  $\vec{y}$ ), ktorú nazývame *výnimočná priamka* (ang. *exceptional line*) a parabola  $y^2 = x + 1$ . Priamku zanedbáme (dôvod si vysvetlíme a dokážeme neskôr), a za hľadanú krivku  $\mathcal{C}_\sigma$  prehlásime parabolu



Obrázok 3.6: Rozkladom krivky  $\mathcal{C} : f(x, y) = y^2 - x^2 - x^3$  je  $\mathcal{C}_\sigma : f_\sigma(x, y) = y^2 - 1 - x$ .

$$f_\sigma(x, y) := y^2 - x - 1.$$

Vidíme, že k singularnej krivke sme našli biracionálne ekvivalentnú, vo všetkých bodoch hladkú krivku – čiže sa nám naozaj podarilo singularitu rozložiť.

**Poznámka:** Animáciu rozkladu tejto singularity a taktiež animáciu rozdutia roviny je možné vidieť na priloženom CD.

**Príklad 3.10:** Uvažujme kubickú krivku  $\mathcal{C} : f(x, y) = y^2 - x^3$ .

Rovnakým spôsobom ako v predchádzajúcom príklade uvidíme, že v bode  $(0, 0)$  je krivka singularná a že  $\vec{y}$  nie je dotyčnicou v tomto bode. Rozložme túto singularitu pomocou zobrazenia  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} \sigma(x, y) : \quad \mathcal{C}_\sigma &\longmapsto \mathcal{C} \\ \sigma(x, y) : \quad (x, y) &\longmapsto (x, xy) \end{aligned}$$

$$f_\sigma(x, y) = f(\sigma(x, y)) = f(x, xy) = (xy)^2 - x^3 = x^2[y^2 - x]$$

Výnimočnou priamkou je znova dvojnásobná os  $\vec{y}$ , hľadanou krivkou je parabola  $\mathcal{C}_\sigma : f_\sigma(x, y) = y^2 - x$ .

V príkladoch sme si ukázali, že pomocou  $\sigma$  vieme singularity naozaj rozložiť. Okrem hľadanej regulárnej krivky  $\mathcal{C}_\sigma$  nám však vznikla i (niekoľkonásobná) výnimočná priamka, o ktorej sme si povedali, že ju nebudeme brať do úvahy. Aký je však jej význam? A prečo ju naozaj môžeme zanedbať?

Zobrazenie  $\sigma(x, y) = (x, xy)$  “stláča” os  $\vec{y}: x = 0$  do bodu  $(0, 0)$ , všade inde je injektívne. Pretože  $\sigma$  je biracionálne, pri hľadaní vzoru os  $\vec{y}$  dostaneme naspäť, avšak s príslušnou násobnosťou. Táto závisí od toho, koľkokrát krivka prechádza počiatkom – každý prechod “pridáva” jeden bod  $(0, 0)$ , ktorý potom nahradíme jednou priamkou  $\vec{y}$ . “Počet prechodov” krivky cez nejaký bod charakterizuje správanie v tomto bode, viacnásobný prechod interpretujeme ako singularnosť. Preto násobnosť výnimočnej priamky závisí práve od zložitosti singularity, ktorú nahradzuje.

Pravdivosť tohto veľmi intuitívneho a neformálneho argumentu potvrdzuje nasledujúca veta a jej dôkaz, ktorá navyše dáva predpis  $f_\sigma(x, y)$  krivky  $\mathcal{C}_\sigma$ .

**Veta 3.2:** *Uvažujme rovinnú krivku  $\mathcal{C}$  stupňa  $n$  s  $d$ -násobnou singularitou v bode  $(0, 0)$  a predpisom*

$$f(x, y) = f_d(x, y) + f_{d+1}(x, y) + \dots + f_n(x, y) = \sum_{i=d}^n f_i(x, y),$$

pričom  $f_i(x, y)$  obsahuje iba členy stupňa  $i$ .

Potom krivka  $\mathcal{C}_\sigma$ , ktorá je biracionálnym ekvivalentom  $\mathcal{C}$  v zobrazení

$$\begin{aligned} \sigma(x, y) = \mathcal{C}_\sigma &\longmapsto \mathcal{C} \\ (x, y) &\longmapsto (x, xy) \end{aligned}$$

má predpis

$$f_\sigma(x, y) = f_d(1, y) + x f_{d+1}(1, y) + \dots + x^{n-d} f_n(1, y).$$

**Dôkaz:** Po aplikovaní zobrazenia  $\sigma$  máme:

$$f(\sigma(x, y)) : f(x, xy) = \sum_{i=d}^n f_i(x, xy)$$

Každý zo sčítancov  $f(x, y)$  možno zapísať ako

$$f_i(x, y) = a_{i,0}x^i + a_{i-1,1}x^{i-1}y + \dots + a_{1,i-1}xy^{i-1} + a_{0,i}y^i = \sum_{j=0}^i a_{i-j,j}x^{i-j}y^j$$

odkiaľ máme

$$\begin{aligned} f_i(x, xy) &= \sum_{j=0}^i a_{i-j,j} x^{i-j} (xy)^j = \sum_{j=0}^i a_{i-j,j} (x^{i-j} x^j) y^j = \\ &= \sum_{j=0}^i a_{i-j,j} x^i y^j = x^i \sum_{j=0}^i a_{i-j,j} 1^{i-j} y^j = x^i f_i(1, y) \end{aligned}$$

Dosadením získavame

$$\begin{aligned} f(x, xy) &= \sum_{i=d}^n f_i(x, xy) = \sum_{i=d}^n x^i f_i(1, y) = \sum_{i=d}^n x^d x^{i-d} f_i(1, y) = \\ &= x^d \sum_{i=d}^n x^{i-d} f_i(1, y) = \underbrace{x^d}_{\frac{1}{y}} \left[ \underbrace{f_d(1, y) + x f_{d+1}(1, y) + \dots + x^{n-d} f_n(1, y)}_{f_\sigma} \right]. \end{aligned}$$

Vidíme, že  $f_\sigma(x, y)$  má naozaj požadovaný tvar. Ešte ukážeme, že  $\mathcal{C}_\sigma$  a  $\mathcal{C}$  sú naozaj biracionálne ekvivalentné.

Označme inverzné zobrazenie k  $\sigma$  ako  $\tau$  a definujme ho nasledovne:

$$\begin{aligned} \tau(x, y) : \quad \mathcal{C} &\longmapsto \mathcal{C}_\sigma \\ (x, y) &\longmapsto \left( x, \frac{y}{x} \right) \end{aligned}$$

$\mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}_\sigma$  : Nech  $(x, y) \in \mathcal{C}$  a  $x \neq 0$ . Ukážeme, že  $\tau(x, y) \in \mathcal{C}_\sigma$ :

Ak  $(x, y) \in \mathcal{C}$ , potom  $f(x, y) = 0$ . Následne

$$\begin{aligned} f_\sigma(\tau(x, y)) &= f_\sigma\left(x, \frac{y}{x}\right) = f_d\left(1, \frac{y}{x}\right) + x f_{d+1}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \dots + x^{n-d} f_n\left(1, \frac{y}{x}\right) = \\ &= \frac{1}{x^d} \left( x^d f_d(1, y) + x^{d+1} f_{d+1}(1, y) + \dots + x^n f_n(1, y) \right) = \frac{1}{x^d} f(x, y) = 0 \end{aligned}$$

Vidíme, že  $f_\sigma(\tau(x, y)) = 0$ , a teda  $\tau(x, y) \in \mathcal{C}_\sigma$ .

$\mathcal{C}_\sigma \rightsquigarrow \mathcal{C}$  : Nech  $(x, y) \in \mathcal{C}_\sigma$ . Ukážeme, že  $\sigma(x, y) \in \mathcal{C}$ :

Ak  $(x, y) \in \mathcal{C}_\sigma$ , potom  $f_\sigma(x, y) = 0$ . Následne

$$\begin{aligned} f(\sigma(x, y)) &= f(x, xy) = f_d(x, xy) + x f_{d+1}(x, xy) + \dots + x^{n-d} f_n(x, xy) = \\ &= x^d \left( f_d(1, y) + x f_{d+1}(1, y) + \dots + x^{n-d} f_n(1, y) \right) = x^d f_\sigma(x, y) = 0 \end{aligned}$$

Vidíme, že  $f(\sigma(x, y)) = 0$ , a teda  $\sigma(x, y) \in \mathcal{C}$ .

Q.E.D.  $\square$

Uvedme si ešte jeden príklad.

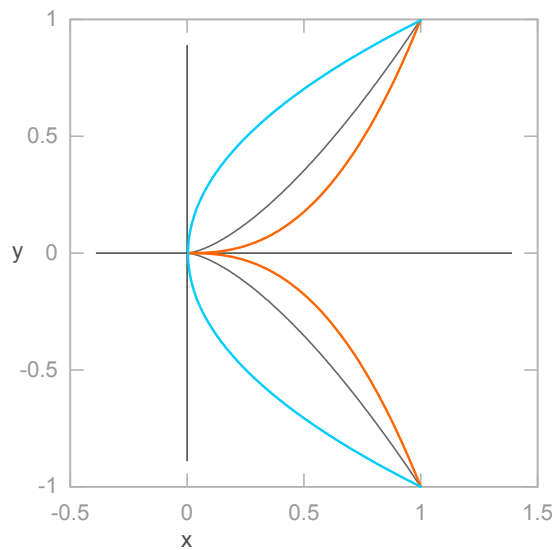
**Príklad 3.11:** Uvažujme kubickú krivku  $\mathcal{C} : f(x, y) = y^2 - x^5$ .

Bod  $(0, 0)$  je singularitou. Po pokuse o rozloženie singularity cez  $\varphi$  dostávame:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) : \quad \mathcal{C}_\varphi &\longmapsto \mathcal{C} \\ \varphi(x, y) : \quad (x, y) &\longmapsto (x, xy) \end{aligned}$$

$$f_\varphi(x, y) = f(\varphi(x, y)) = f(x, xy) = (xy)^2 - x^5 = x^2[y^2 - x^3]$$

Výnimočnou priamkou je znova dvojnásobná os  $\vec{y}$ , avšak krivkou, ktorú sme dostali, je singularná krivka z predchádzajúceho príkladu (3.10). Nie je regulárna, čo nám nevyhovuje, preto aplikujeme  $\varphi$  ešte raz na  $\mathcal{C}_\varphi$  – dostávame parabol  $\mathcal{C}_{\varphi\varphi} : f_{\varphi\varphi}(x, y) = y^2 - x$ , ktorá už je regulárna.



Obrázok 3.7: Rozkladom krivky  $\mathcal{C} : f(x, y) = y^2 - x^5$  je najprv  $\mathcal{C}_\varphi : f_\varphi(x, y) = y^2 - x^3$  a napokon  $\mathcal{C}_{\varphi\varphi} : f_{\varphi\varphi}(x, y) = y^2 - x$ .

Všimnime si zaujímavú vec: po prvej aplikácii sa z trojnásobného bodu stal dvojnásobný, po druhom použití sme získali regulárnu krivku – zložitosť singularity klesala, až napokon úplne zmizla. Ako a prečo je to možné? Odpoveď nám dá nasledujúce tvrdenie.

**Veta 3.3:** Uvažujme rovinnú krivku  $\mathcal{C}$  stupňa  $n$  s  $d$ -násobnou singularitou v bode  $(0, 0)$  a predpisom

$$f(x, y) = \sum_{i=d}^n f_i(x, y),$$

pričom  $f_i(x, y)$  obsahuje iba členy stupňa  $i$ . Nech os  $\vec{y}$  nie je dotyčnicou  $\mathcal{C}$  v počiatku. Potom

$$\sigma^{-1}(0, 0) = \{P_i \mid P_i = (0, \kappa_i) \wedge p_i \leq d_i, i = 1, \dots, s\}$$

kde  $p_i$  označuje násobnosť  $P_i$  v  $\mathcal{C}_\sigma$  a  $d_i$  násobnosť dotyčnice  $y = \kappa_i x$  krivky  $\mathcal{C}$  v bode  $(0, 0)$ .

**Dôkaz:**

1. *Body prieniku*

Veta 3.2 nám poskytla presný predpis krivky  $\mathcal{C}_\sigma$ :

$$f_\sigma(x, y) = f_d(1, y) + x f_{d+1}(1, y) + \dots + x^{n-d} f_n(1, y).$$

Do prieniku  $\sigma^{-1}(0, 0) = \mathcal{C}_\sigma \cap \vec{y}$  preto patria body, ktoré súčasne spĺňajú

$$\left. \begin{array}{l} f_\sigma(x, y) = 0 \\ x = 0 \end{array} \right\} \iff f_d(1, y) = 0$$

Polynóm  $f_d(x, y)$  popisuje dotykový kužeľ singularity v bode  $(0, 0)$  a vďaka algebraickej uzavretosti poľa  $\mathbb{C}$  úplne faktorizuje. Pri združení rovnakých členov ho potom môžeme zapísať ako

$$f_d(x, y) = m(y - \kappa_1 x)^{d_1} \dots (y - \kappa_s x)^{d_s} = m \prod_{i=1}^s (y - \kappa_i x)^{d_i}$$

pričom  $m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  je vhodná konštanta,  $\kappa_i \neq \kappa_j$  pre  $i \neq j$  a  $d_i$  je násobnosť príslušného činiteľa (a teda dotyčnice so smernicou  $\kappa_i$ ).

Máme

$$f_d(1, y) = m \prod_{i=1}^s (y - \kappa_i)^{d_i}$$

a odtiaľ

$$\mathcal{C}_\sigma \cap \vec{y} = \{P_i \mid P_i = (0, \kappa_i), i = 1, \dots, s\}.$$

2. *Násobnosť bodov prieniku*

Potrebuje ukázať, že rozdzutie nám pomáha, a nie naopak. Preto požadujeme, aby sa aplikovaním zobrazenia  $\sigma$  singularita minimálne nezhoršili, ak sa už nezlepšia – čiže chceme, aby  $P_i$  mali nižšiu, resp. nerastúcu násobnosť oproti zodpovedajúcej dotyčnici.

Násobnosť bodu na krivke  $\mathcal{C}_\sigma$  určíme podľa rádu prvej nenulovej derivácie v ňom. My potrebujeme, aby  $p_i \leq d_i$ , teda aby existovala (nanajvýš)  $d_i$ -ta derivácia, ktorá bude v  $P_i = (0, \kappa_i)$  nenulová.

Deriváciu  $\frac{\partial^{d_i}}{\partial y^{d_i}} f_\sigma(x, y)$  môžeme zapísať ako

$$\frac{\partial^{d_i}}{\partial y^{d_i}} f_\sigma(x, y) = \frac{\partial^{d_i}}{\partial y^{d_i}} \left( m \prod_{i=1}^s (y - \kappa_i)^{d_i} \right) + x \frac{\partial^{d_i}}{\partial y^{d_i}} \left[ f_{d+1}(1, y) + \dots + x^{n-d-1} f_n(1, y) \right]$$

Po dosadení  $P_i = (0, \kappa_i)$  je druhý sčítanec rovný 0, preto stačí derivovať prvý:

$$\frac{\partial^{d_i}}{\partial y^{d_i}} \left( m \prod_{i=1}^s (y - \kappa_i)^{d_i} \right) = \frac{\partial^{d_i-1}}{\partial y^{d_i-1}} \left( \frac{\partial}{\partial y} m \prod_{i=1}^s (y - \kappa_i)^{d_i} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (y - \kappa_1)^{d_1} (y - \kappa_2)^{d_2} \dots (y - \kappa_s)^{d_s} &= d_1 (y - \kappa_1)^{d_1-1} (y - \kappa_2)^{d_2} \dots (y - \kappa_s)^{d_s} + \\ &+ d_2 (y - \kappa_1)^{d_1} (y - \kappa_2)^{d_2-1} \dots (y - \kappa_s)^{d_s} + \\ &\quad \vdots \\ &+ d_s (y - \kappa_1)^{d_1} (y - \kappa_2)^{d_2} \dots (y - \kappa_s)^{d_s-1}. \end{aligned}$$

Vidíme, že pri jednej derivácii sa stupeň polynómu buď zníži (ak  $d_i \neq 0$ ), alebo sa zachová (ak  $d_i = 0$ ), a toto sa opakuje príslušný počet krát (kým  $\frac{\partial^{d_i}}{\partial y^{d_i}} f_d(0, \kappa_i) \neq 0$ ). Odtiaľ máme  $p_i \leq d_i$ .

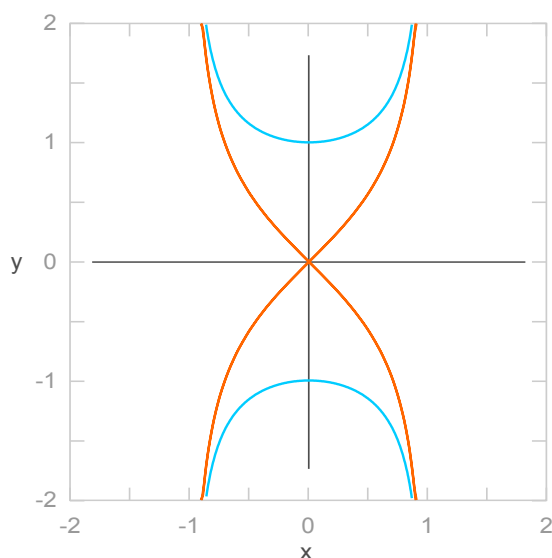
Q.E.D.  $\square$

**Príklad 3.12:** Uvažujme krivku  $\mathcal{C} : f(x, y) = y^2 - x^2 - x^2 y^2$ .

Krivka má v bode  $(0, 0)$  obyčajnú singularitu. Dotykový kužeľ tvoria priamky  $y = \pm x$ . Podľa vety 3.3 očakávame, že  $\mathcal{C}_\sigma \cap \vec{y} = \{(0, 1), (0, -1)\}$ .

Krivka s rozloženou singularitou má predpis  $\mathcal{C}_\sigma : f_\sigma(x, y) = x^2 y^2 - y^2 + 1$ . Os  $\vec{y}$  pretína v bodoch  $(0, y)$ , druhú súradnicu dopočítame dosadením:  $f_\sigma(0, y) = 1 - y^2 = 0$ .

Odtiaľ máme  $y = \pm 1$ , čiže očakávané  $\{(0, 1), (0, -1)\}$ .



Obrázok 3.8: Krivka  $\mathcal{C} : f(x, y) = y^2 - x^2 - x^2y^2$  s dotyčnicami  $y = \pm x$  sa zobrazí na  $\mathcal{C}_\sigma$ , pričom  $\mathcal{C}_\sigma \cap \vec{y}$  tvoria body  $(0, \pm 1)$ .

### 3.3.3 Rozklad singularity ako nástroj na získanie parametrizácie

V podkapitole venovanej parametrizácii sme si povedali, že racionálne krivky možno vyjadriť ako funkciu parametra. Uvedli sme si konštrukcie pre niektoré vybrané krivky, avšak postupovali sme viac-menej intuitívne.

Uvažujme však nasledovne: ak je parametrizácia naozaj iba iný zápis (vďaka biracionálnosti), pri transformácii sa tento mení spolu s krivkou. Preto ak rozkladom nájdeme regulárnu  $\mathcal{C}_\sigma$  ktorej parametrizáciu poznáme, vieme nájsť aj predpis pre pôvodnú krivku  $\mathcal{C}$  – stačí dosadiť.

**Príklad 3.13:** Uvažujme *Geronovu lemniskátu*  $\mathcal{C} : f(x, y) = x^4 - x^2 + y^2$ .

Na rozloženie singularity v  $(0, 0)$  stačí jedna aplikácia  $\sigma$  :

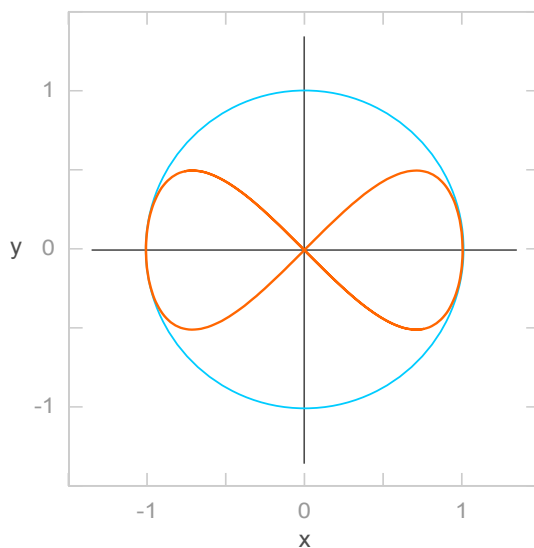
$$f_\sigma(x, y) = f(\sigma(x, y)) = f(x, xy) = x^4 - x^2 + (xy)^2 = x^2[x^2 - 1 + y^2],$$

hľadanou krivkou  $\mathcal{C}_\sigma$  je jednotková kružnica  $f_\sigma(x, y) : x^2 + y^2 - 1$ .

Parametrizáciou kružnice (pr. 3.3) je

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) : t \rightarrow \left( \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right) = (x, y), \quad t \in \mathbb{C}$$





Obrázok 3.9: Rozkladom singularity Geronovej lemniskáty  $\mathcal{C} : f(x, y) = x^4 - x^2 + y^2$  získame jednotkovú kružnicu  $\mathcal{C}_\sigma : f_\sigma(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ .

Skúsme použiť  $\sigma$  na nájdenie parametrizácie  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{aligned} \sigma : \quad \mathcal{C}_\sigma &\longmapsto \mathcal{C} \\ (x, y) &\longmapsto (x, xy) \\ \sigma(x, y) = \sigma(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) &= \left( \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \right), \quad t \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Dosadením do  $f(x, y)$  overme, že získaný predpis je naozaj parametrizáciou  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^4 - \left( \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^2 + \left( \frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \right)^2 &= \\ \frac{(1-t^2)^4 - (1-t^2)^2(1+t^2)^2 + (2t(1-t^2))^2}{(1+t^2)^4} &= \\ \frac{(1-t^2)^2[(1-t^2)^2 - (1+t^2)^2 + 4t^2]}{(1+t^2)^4} &= \frac{0}{(1+t^2)^4} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

# 4

## Záver

Cieľom predloženej práce bolo čitateľovi jednoduchou a zrozumiteľnou formou predstaviť problematiku singularít rovinných kriviek a ich rozkladu. Zvolili sme výkladovú formu zahŕňajúcu veľké množstvo motivačných príkladov, na riešeniach ktorých sme si predstavili jednotlivé pojmy. Pozorovania sme po dôkladnom vysvetlení formálne zhrnuli do definícií a viet, vypracovali sme niekoľko dôkazov menších tvrdení.

Na začiatku sme sa venovali problematike rovinných kriviek. Rozdelili sme ich na singularne a regulárne podľa toho, či obsahujú alebo neobsahujú singularne body; uviedli sme si všeobecnú metódu na detekciu singularít.

V ďalšej časti sme skúmali zobrazenia medzi krivkami - parametrizáciu, izomorfizmy a biracionálne zobrazenia. Z týchto sme si podrobne predstavili “rozdutie roviny”, ktoré sme následne použili na rozklad singularít a získanie predpisu parametrizácie.

Navyše sme vytvorili počítačové animácie, ktorých jedinou úlohou je inovatívnou a príťažlivou formou upútať čitateľovu pozornosť. Sme totiž presvedčení, že matematika je zaujímavá a hravá, a preto je škoda nechať ju žiť iba vo vzorcoch – najmä v takých prípadoch, keď sa dá vidieť.

# Literatúra

- [Ful08] FULTON, W. *An Introduction to Algebraic Geometry*. [online]. 3. vyd. [s.l.]: [s.n.], 2008. [cit. 28.4.2009]. 129 s.  
Dostupné na internete: <<http://www.math.lsa.umich.edu/~wfulton/>>.
- [Cut04] CUTKOSKY, S.D. *Resolution of singularities*. [s.l.]: AMS Bookstore, 2004. 186 s. ISBN 0-821-83555-6.
- [Har97] HARTSHORNE, R. *Algebraic Geometry*. 8.vyd. [New York]: Springer-Verlag New York Inc., 1997. 496 s. ISBN 0-387-90244-9.
- [Mor93] MORENO, C. *Algebraic curves over finite fields*. [s.l.]: Cambridge University Press, 1993. 246 s. ISBN 0-521-45901-X.
- [Abh90] ABHYANKAR, S.S. *Algebraic Geometry for Scientists and Engineers*. American Mathematical Society. In *Mathematical Surveys and Monographs, ISSN 0076-5376*, 1990. vol. 35. 295 s.
- [Rei88] REID, M. *Undergraduate Algebraic Geometry*. [s.l.]: Cambridge University Press, 1988. 133 s. ISBN 0-521-35662-8.
- [Wal78] WALKER, R.J. *Algebraic Curves*. [New York]: Springer-Verlag New York Inc., 1978. 201 s. ISBN 0-387-90361-5.