

# Odhady parametrov modelov časovej štruktúry úrokových mier

ŠTUDENTSKÁ VEDECKÁ KONFERENCIA

Ivan Sutóris



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky  
Katedra Aplikovanej Matematiky a Štatistiky

Vedúci práce:  
doc. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Bratislava 2009

*Táto práca je založená na diplomovej práci, ktorej vedúcom je doc. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc. a ktorému touto cestou ďakujem za jeho čas a pripomienky k zlepšeniu práce.*

SUTÓRIS, Ivan\*. *Odhady parametrov modelov časovej štruktúry úrokových mier* [práca na ŠVK]. Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. Vedúci práce: Doc. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc. Bratislava, 2009

\*email: [ivan.sutoris@gmail.com](mailto:ivan.sutoris@gmail.com)

**Abstrakt:** Viacfaktorový Cox-Ingersoll-Ross model modeluje okamžitú úrokovú mieru (short-rate) ako súčet niekoľkých nezávislých faktorov, z ktorých každý sleduje Besselov odmocninový stochastický proces. Zvyšok výnosovej krivky je odvodený s použitím princípu vylúčenia arbitráže ako deterministická funkcia faktorov. Práca sa zaoberá metódou na odhad parametrov modelu, ktorá je založená na dvojfázovej min-max metóde pre jednofaktorový model. Počet parametrov je zredukovaný transformáciou a v prvej fáze sa odhadujú transformované parametre *spolu* s nepozorovateľnými faktormi metódou nelineárnych najmenších štvorcov na trhovách dátach. Vďaka vlastnostiam CIR modelu je možné vypočítať faktory efektívne pomocou vnoreného problému viazanej lineárnej regresie. Vonkajšia minimalizácia je vo všeobecnosti úlohou globálnej nekonvexnej optimalizácie, na ktorú je použité simulované žihanie. V druhej fáze získame pôvodné parametre z odhadnutých transformovaných pomocou maximalizácie funkcie vierohodnosti na odhadnutých časových radoch faktorov, alebo zvolením hodôt pre parametre mean-reversion úrovne.

**Kľúčové slová:** viacfaktorový CIR model, odhad parametrov, nelineárna metóda najmenších štvorcov, metóda maximálnej vierohodnosti

**Abstract:** Multi-factor Cox-Ingersoll-Ross model models instantaneous interest rate (or short-rate) as a sum of several independent factors, each following a Bessel square-root stochastic process. The rest of yield curve is then derived, by applying no-arbitrage principle, as a deterministic function of factors. I investigate a method for estimation of model parameters, which is based on two-phase min-max method for one-factor model. Number of parameters is reduced by a transformation and in the first stage, *both* transformed parameters and unobservable factors are estimated by nonlinear least squares method using observed market yields. Due to properties of CIR model, factors may be efficiently computed by solving a nested constrained linear regression subproblem. Outer minimization is, in general, non-convex global optimization problem and is solved by simulated annealing. In the second stage, original parameters are estimated from the transformed ones obtained earlier, by maximizing likelihood functions on time series of estimated factors, or by setting mean reversion level parameters.

**Keywords:** multifactor CIR model, parameter estimation, nonlinear least squares method, maximum likelihood method

# Obsah

Obsah	4
<b>1 Úvod</b>	<b>5</b>
<b>2 CIR model</b>	<b>7</b>
2.1 Základné pojmy . . . . .	7
2.2 Modely short-rate . . . . .	9
2.3 CIR model . . . . .	11
<b>3 Dvojfázová min-max metóda</b>	<b>15</b>
3.1 Kalibrácia jednofaktorového modelu . . . . .	15
3.2 Rozšírenie na viac faktorov . . . . .	17
3.3 Zhrnutie . . . . .	20
<b>4 Implementácia metódy</b>	<b>23</b>
4.1 Numerické metódy . . . . .	23
4.2 Simulované dáta . . . . .	25
<b>5 Aplikácia na reálne dáta</b>	<b>28</b>
<b>6 Záver</b>	<b>33</b>
<b>Literatúra</b>	<b>34</b>

# Kapitola 1

## Úvod

Na finančných trhoch existuje v súčasnosti veľké množstvo finančných nástrojov, ktoré sú odvodené od úrokovej miery a jej pohybov. Pri oceňovaní týchto produktov nie je možné sa zaoberať bez modelov úrokovej miery, ktoré sa snažia popisovať jej stochastický vývoj. Oblasť modelovania úrokových mier a oceňovania ich derivátov je dôležitou oblasťou modernej finančnej matematiky a cieľom mnohých súčasných výskumov.

V tejto práci sa budeme zaoberať viacfaktorovým Cox-Ingersoll-Ross (CIR) modelom, ktorý patrí medzi triedu modelov postavených na okamžitej úrokovej miere. Jednofaktorové modely (ako Vašíčkov model, CIR model) modelujú pohyb okamžitej úrokovej miery (nazývanej aj short-rate), ktorá predstavuje začiatok výnosovej krivky pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice. Za predpokladu vylúčenia arbitráže na trhu je následne možné odvodiť zvyšok výnosovej krivky ako deterministickú funkciu short-rate, ktorá tak ostáva jediným stochastickým faktorom. Nevýhodou týchto modelov je, že z nich odvodené teoretické výnosové krivky nepopisujú dostatočne reálne trhové dáta. Možným riešením tohto nedostatku je zahrnutie ďalších stochastických premenných do modelu, čím získame viacfaktorový model.

Viacfaktorový CIR model vysvetľuje okamžitú úrokovú mieru ako súčet viacerých nezávislých zložiek, z ktorých každá sa riadi vlastným stochastickým procesom a ovplyvňuje odvodenú výnosovú krivku. Fakt, že rovnakej hodnote short-rate môžu prináležať rôzne výnosové krivky v závislosti od jej rozkladu na jednotlivé zložky, a celkovo bohatšia množina prípustných tvarov teoretických výnosových kriviek, by mohli prispieť k lepšej zhode modelu a empirických dát. Nevýhodou tohto modelu je, že zložky short-rate zvyčajne nie sú pozorovateľné (pozorujeme iba ich súčet), čo spôsobuje problémy najmä pri kalibrácii parametrov modelu na reálnych dátach, ktorá je nevyhnutná pri použití modelu v praxi.

Keďže časové rady zložiek short-rate nie sú pozorovateľné, nie je možné odhadnúť parametre modelu obvykle používanými štatistickými metódami. Namiesto toho sa v tejto práci pokúsime rozšíriť publikovanú [1] dvojfázovú min-max metódu na odhad parametrov jednofaktorového CIR modelu na prípad viacerých faktorov. Vstupnými dátami budú trhové výnosové krivky z nejakého časového obdobia. Tie použijeme v prvej fáze na nájdenie množiny parametrov a rozkladu short-rate na faktory, ktoré minimalizujú sumu štvorcov odchýlok teoretických a pozorovaných kriviek. Hlavným rozšírením je, že spolu s parametrami odhadujeme aj rozklad na faktory, čo

náš prístup zdanlivo komplikuje – vďaka vlastnostiam CIR modelu však je možné túto úlohu efektívne riešiť ako vnorený problém pri odhade parametrov a získať tak účelovú funkciu závislú iba od parametrov. Keďže neexistuje jediné minimum takejto účelovej funkcie, v druhej fáze potom musíme vybrať z výslednej množiny parametrov konkrétny bod na základe ďalšieho kritéria, ktoré možno získať z odhadnutých časových radov jednotlivých faktorov.

Práca je organizovaná nasledovne: druhá kapitola obsahuje stručný úvod do modelov okamžitej úrokovej miery a približuje konkrétnejšie CIR model a jeho vlastnosti. Tretia kapitola popisuje jednofaktorovú min-max metódu a navrhnuté rozšírenie pre prípad viacerých faktorov. V štvrtej kapitole sú uvedené niektoré detaily o praktickej implementácii tejto metódy a výsledky výpočtov na simulovaných dátach. Nakoniec v piatej kapitole odhadujeme parametre modelu na reálnych dátach zo sadzieb na medzibankovom trhu.

# Kapitola 2

## CIR model

Modelovanie úrokovej miery a oceňovanie jej derivátov je dôležitou oblasťou finančnej matematiky. Cieľom tejto kapitoly je predstaviť základné pojmy a podať stručný prehľad triedy modelov založených na modelovaní okamžitej úrokovej miery, medzi ktoré patrí aj CIR model ako hlavný predmet tejto práce. Podrobnejšie informácie o modeloch úrokovej miery je možné nájsť v knihách [2] a [3], ktoré slúžili ako hlavný zdroj pre túto kapitolu.

### 2.1 Základné pojmy

Peniaze v rôznych časoch majú rôznu hodnotu – pre ľudí má tá istá suma v čase  $t_1$  väčšiu hodnotu ako neskôr v čase  $t_2 > t_1$ . Mieru tejto preferencie vyjadruje úroková miera. Existuje mnoho obchodovaných finančných nástrojov, ktorých hodnota závisí od úrokovej miery, medzi základné patrí bezkupónový dlhopis (kupónový dlhopis je možné chápať ako súbor bezkupónových), ktorý zaručuje istú<sup>1</sup> výplatu dohodnutej sumy v budúcnosti. Z jeho súčasnej ceny (ktorá sa dá chápať ako pôžička pre vydávateľa dlhopisu) sa dá následne odvodiť úroková miera pre dané obdobie. Pre účely ďalších kapitol zdefinujeme na začiatok niekoľko základných pojmov a označení.

**Cena dlhopisu**  $P(t, \tau)$  je cena bezkupónového dlhopisu, ktorý vyplatí jednotkovú sumu odteraz za čas  $\tau$  (teda v čase  $t + \tau$ ). Zrejme hodnota dlhopisu splatného okamžite sa rovná jeho výplatnej hodnote:  $P(t, 0) = 1$ , a  $P$  je klesajúcou funkciou  $\tau$  (súčasná hodnota platby ďalej v budúcnosti je menšia).  $\tau$  sa označuje ako maturita dlhopisu alebo čas do splatnosti.

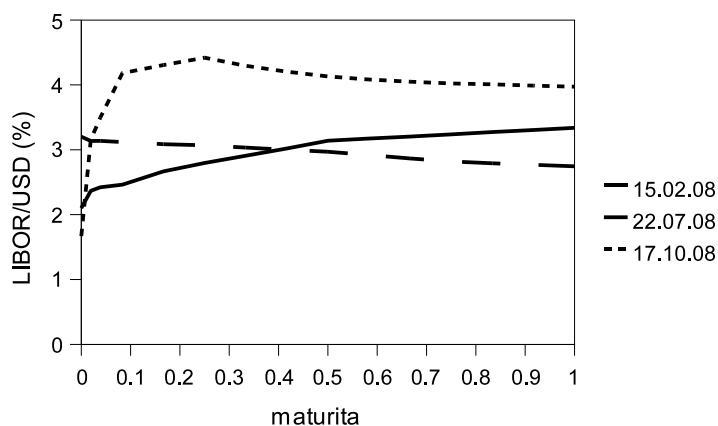
**Výnos**  $R(t, \tau) = -\frac{\ln P(t, \tau)}{\tau}$  je výnos (na jednotku času) v čase  $t$  pre čas do splatnosti  $\tau$ , ktorý je odvodený z ceny dlhopisu  $P(t, \tau)$ . Vzorec vychádza z myšlienky spojitého úrokovania – súčasná cena dlhopisu by sa mala za čas  $\tau$  zúročiť na výplatnú sumu:

$$P(t, \tau)e^{R(t, \tau)\tau} = 1.$$

Keď zafixujeme čas  $t$ , závislosť medzi časom do splatnosti a výnosom  $\tau \rightarrow R(t, \tau)$  sa nazýva *časová štruktúra úrokových mier* alebo výnosová krivka.

---

<sup>1</sup>abstrahujeme od kreditného rizika, neuvažujeme teda možnosť nedodržania záväzkov strany vydávajúcej dlhopis



Obr. 2.1: Ukážky výnosových kriviek pre dolárový LIBOR z roku 2008

**Okamžitá úroková miera**  $r(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} R(t, \tau)$  nazývaná aj *short-rate*, určuje výnos pre dlhopis splatný v „ďalšom okamihu“, čo vlastne predstavuje začiatok výnosovej krivky. Ide o teoretickú veličinu, ktorá sa v praxi môže aproximovať napríklad pomocou overnightu (úrok na jednodňovú pôžičku).

V praxi sa zvyčajne nepracuje s cenami dlhopisov, ale uvádzajú sa priamo výnosy. Medzi dôležité úrokové miery patria sadzby na medzibankovom trhu (za ktoré si navzájom požičiavajú komerčné banky), ktoré sú zvyčajne krátkodobé (do jedného roku), a sadzby na vládne dlhopisy. Príklad výnosovej krivky z medzibankového trhu je na obrázku 2.1, na ktorom vidíme, že výnosové krivky môžu nadobúdať rôzne tvary - rastúce, klesajúce aj zmiešané.

Popri dlhopisoch existujú aj iné deriváty úrokovej miery, ktoré je možné použiť na zaistenie (alebo naopak na špekuláciu) proti fluktuáciám úrokových mier, napríklad:

**Swap** výmena konštantnej platby za pohyblivú platbu závisiacu od úrokovej miery

**Swaption** právo (ale nie povinnosť) vstúpiť do swapového kontraktu

**Cap** právo na výplatu vzniká, ak úroková miera prekročí stanovenú hranicu. Cap je možné previesť na súbor opcí na dlhopisy.

**Floor** právo na výplatu vzniká, ak úroková miera klesne pod stanovenú hranicu – opak capu.

Na oceňovanie týchto derivátov je potrebná teória, ktorá je založená na predpokladoch o vývoji podkladových úrokových mier, preto vznikla potreba stochastického modelovania úrokovej miery. Ďalšou aplikáciou modelov úrokovej miery môže byť napríklad manažment rizika pomocou simulácií budúceho vývoja úrokových mier. Na rozdiel od modelovania cien akcií, kde prevládajúcim prístupom je Black-Scholesov model založený na predpoklade o geometrickom Brownovom pohybe ceny akcie, v oblasti úrokových modelov situácia nie je taká jasná a doteraz bolo navrhnutých viacero tried modelov, napríklad:



- Short-rate modely modelujú okamžitú úrokovú mieru (začiatok výnosovej krivky) a zvyšok výnosovej krivky je odvodený ako jej deterministická funkcia. Týmito modelmi sa budeme v práci zaoberať podrobnejšie.
- Heath-Jarrow-Morton modely modelujú krivku forwardových úrokových mier. Ide o všeobecnejšiu triedu modelov (niektoré short-rate modely existujú aj v HJM formulácii), nevýhodou je ich zvýšená komplexnosť.
- LIBOR market model modeluje naraz skupinu viacerých forwardových úrokových mier, používa sa najmä na oceňovanie exotickjších derivátov úrokovej miery.

## 2.2 Modely short-rate

Short-rate modely popisujú stochastický vývoj okamžitej úrokovej miery, z ktorého potom pomocou princípu vylúčenia arbitráže odvodzajú vzťahy pre zvyšok výnosovej krivky a ďalšie deriváty úrokovej miery. Short-rate je modelovaná spojitým stochastickým procesom, ktorý je určený stochastickou diferenciálnou rovnicou:

$$dr = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dW. \quad (2.1)$$

$\mu(r, t)$  určuje deterministický driftový člen,  $\sigma(r, t)$  určuje veľkosť stochastického členu – volatility,  $dW$  je diferenciál Wienerovho procesu. Keďže v modeli je prítomný iba jeden stochastický faktor, hovoríme o *jednofaktorových* modeloch úrokovej miery. Mnoho navrhnutých modelov sa dá sformulovať v tvare mean-reverting procesu s volatilitou závislou od mocniny  $r$  [4]:

$$dr = \kappa(\theta - r) + \sigma r^\gamma dW. \quad (2.2)$$

Keď už je špecifikovaný proces pre short-rate v tvare (2.1), použitím Itôvej lemy a princípu vylúčenia arbitráže je možné odvodiť (viď [2], [3]) parciálnu diferenciálnu rovnicu pre ceny dlhopisov (alebo iných derivátov):

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + (\mu(t, r) - \lambda(t, r)\sigma(t, r))\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2(t, r)\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0 \quad (2.3)$$

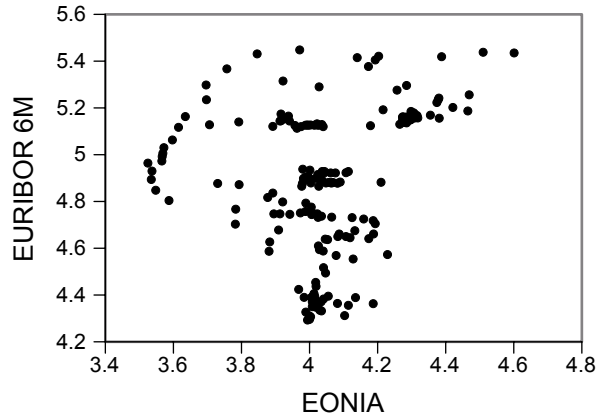
$$P(r, 0) = 1$$

kde  $\lambda$  sa nazýva *trhová cena rizika* a vyjadruje rozdiel medzi okamžitým výnosom dlhopisu a výnosom zodpovedajúcim okamžitej úrokovej miere, v pomere k volatilitě dlhopisu:

$$\lambda(r, t) = \frac{\mu_B(r, t, T) - rP(r, t, T)}{\sigma_B(r, t, T)} \quad (2.4)$$

Ide o funkciu, ktorá súvisí s postojmi investorov a bez ktorej nie je možné<sup>2</sup> oceniť dlhopisy (a ďalšie deriváty úrokovej miery).

<sup>2</sup>Alternatívne je možné formulovať proces pre short-rate v tzv. rizikovo-neutrálnom tvare a odvodiť ceny dlhopisov bez trhovej ceny rizika, v ktorých budú vystupovať rizikovo-neutrálne parametre. V takom prípade však nie je možné tieto parametre odhadovať analýzou historických dát, lebo tie pochádzajú z náhodného procesu v reálnej pravdepodobnostnej miere. Na transformáciu z rizikovo-neutrálnych parametrov do reálnych je potrebné opäť definovať trhovou cenu rizika.



Obr. 2.2: Závislosť medzi overnightom a 6-mesačným výnosom v eurozóne za obdobie január – október 2008. Korelácia medzi uvedenými mierami je 0,29.

Výsledkom tohto odvodenia je vzťah pre ceny dlhopisov, z ktorých je možné odvodiť výnosy. Ak sú členy v procese pre short-rate v čase konštantné, teoretická výnosová krivka je jednoznačne určená jej začiatkom – okamžitou úrokovou mierou (príklad takejto výnosovej krivky je na obr. 2.4). Táto výnosová krivka pritom nemusí zodpovedať skutočnej trhovej krivke, je výstupom modelu a mala by predstavovať rovnovážny stav – preto sa takýto typ modelu označuje ako *rovnovážny*. Existujú aj tzv. bezarbitrážne modely (napríklad Ho-Lee alebo Hull-White model) - tie obsahujú parametre závislé na čase, ktoré sa nakalibrujú z trhových dát tak, aby sa teoretická výnosová krivka presne zhodovala s pozorovanou. Týmto sa však v práci nebudeme zaoberať.

Nedostatkom jednofaktorových modelov je, že celá výnosová krivka je daná začiatočným bodom – z toho vyplýva, že jednej úrovni short-rate zodpovedá práve jedna úroveň výnosu (pre nejakú splatnosť). Toto však nie je v súlade so skutočnosťou a dajú sa nájsť časové obdobia, kedy na reálnych dátach pozorujeme slabý vzťah medzi okamžitou úrokovou mierou a výnosom na dlhšie obdobie (viď obrázok 2.2). Tento fakt je motiváciou pre skúmanie viacfaktorových modelov, v ktorých vystupuje viacero stochastických veličín.

Dvojfaktorový model s faktormi  $x$  a  $y$  má všeobecný tvar

$$\begin{aligned} dx &= \mu_x(x, y)dx + \sigma_x(x, y)dW_1 \\ dy &= \mu_y(x, y)dy + \sigma_y(x, y)dW_2 \end{aligned}$$

pričom Wienerove procesy  $W_1$ ,  $W_2$  môžu byť korelované s koeficientom  $\rho$ . Za faktory môžeme zvoliť rôzne veličiny, napríklad:

- samotná short-rate sa skladá z viacerých stochastických zložiek, (napríklad dvojfaktorový CIR – [5], [6]).
- popri short-rate vystupuje v modeli aj ďalšia ekonomická veličina, napríklad dlhodobá úroková miera (Brennan-Schwartzov model – [7]) alebo zahraničná úroková miera (konvergenčný model – [8]).

- v modeloch so stochastickou volatilitou je volatilita v procese pre short-rate modelovaná ako ďalšia náhodná veličina (CIR model so stochastickou volatilitou – [9])

Podobne ako predtým, znova je možné odvodiť teoretické ceny dlhopisov ako funkciu faktorov  $P(x, y, t)$ :

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + (\mu_x - \lambda_1 \sigma_x) \frac{\partial P}{\partial x} + (\mu_y - \lambda_2 \sigma_y) \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\sigma_x^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\sigma_y^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \rho \sigma_x \sigma_y \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = r(x, y)P$$

$$P(x, y, 0) = 1. \quad (2.5)$$

Riešením tejto PDR získame teoretické ceny dlhopisov a výnosovú krivku v závislosti od faktorov  $x, y$ . Príklad teoretickej výnosovej krivky z viacfaktorového modelu je na obrázku 2.4. Na záver treba podotknúť, že i keď toto odvodenie sa týkalo dvojfaktorového modelu, analogicky je možné zaviesť aj troj- alebo viac-faktorové modely.

Pre použitie modelov úrokovej miery v praxi je nutné zvoliť správne v nich vystupujúce parametre, t.j. nakalibrovať ich. V prípade jednofaktorového modelu, ak máme k dispozícii časový rad pozorovaných hodnôt short-rate, môžeme odhadnúť parametre vystupujúce v SDR pre short-rate ich štatistickou analýzou. Trhovú cenu rizika je následne možné odhadnúť pomocou sklonu výnosovej krivky na jej začiatku (viď [3]):

$$\left. \frac{\partial R}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = \frac{1}{2}(\mu(r, t) - \sigma(r, t)\lambda(r, t)).$$

Bližšie spomenieme metódu *maximálnej vierohodnosti*, v ktorej volíme parametre tak, aby sa maximalizovala vierohodnostná funkcia (pravdepodobnosť realizácie dát pri daných parametroch). Na to je potrebné poznať podmienené hustoty procesu  $f(r(T)|r(t) = r)$ , ktoré popisujú rozdelenie premennej v čase  $T$  za predpokladu, že v skoršom čase  $t$  nadobudla nejakú hodnotu  $r$ .

Ak máme k dispozícii časový rad  $r_i, i = 1, \dots, k$  zodpovedajúci pozorovaniam v časoch  $t_i$  (tie sú zvyčajne v rovnakých rozostupoch) a poznáme podmienenú hustotu, definujeme log-vierohodnostnú funkciu ako

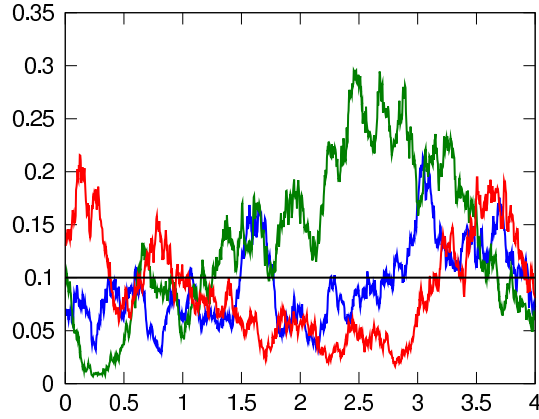
$$\ln L = \sum_{i=2}^k \ln f(r(t_i) = r_i | r(t_{i-1}) = r_{i-1}) \quad (2.6)$$

a tú potom budeme maximalizovať cez parametre procesu.

Medzi ďalšie používané metódy patria napríklad zovšeobecnená metóda momentov (GMM) použitá napríklad v článku [4], alebo bayesovské a MCMC metódy. Ďalšou možnosťou je namiesto priamych hodnôt short-rate použiť trhové výnosy (ktoré sú ich funkciou) a riešiť tak úlohu nelineárnej regresie. Podrobnejší prehľad použitých metód spolu s odkazmi na literatúru je možné nájsť v práci [10].

## 2.3 CIR model

Cox-Ingerson-Ross model úrokovej miery ([5]) patrí medzi short-rate modely spomínané v predchádzajúcej kapitole. V tejto kapitole stručne popíšeme vlastnosti jedno-



Obr. 2.3: Simulácie CIR procesu

a viac-faktorového CIR modelu (čerpáme prevažne z [3] a pôvodného článku [5]). Jednofaktorový CIR model modeluje vývoj short-rate cez stochastickú diferenciálnu rovnicu<sup>3</sup>:

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dW \quad (2.7)$$

Ide o prípad modelu v tvare (2.2), kde  $\gamma = 1/2$  – volatilita je závislá od odmocniny short-rate, čo zabezpečuje, že  $r$  neklesne pod nulu. Ak by  $r = 0$  tak volatilita bude nulová a  $r$  bude vďaka driftovému členu rásť. Navyše ak platí  $2\kappa\theta/\sigma^2 > 1$  (Fellerova podmienka), dosiahnutie nuly nastane s pravdepodobnosťou 0. Niekoľko realizácií procesu (2.7) je pre ilustráciu na obrázku 2.3.

Pre proces (2.7) je možné explicitne vyjadriť podmienenú hustotu  $r(T)$  ak poznáme hodnotu  $r(t)$  v čase  $t < T$ :

$$f(r(T)|r(t)) = ce^{-u-v} \left(\frac{v}{u}\right)^{q/2} I_q(2\sqrt{uv}) \quad (2.8)$$

kde

$$c = \frac{2\kappa}{\sigma^2(1 - e^{-\kappa(T-t)})}, \quad u = cr(t)e^{-\kappa(T-t)}, \quad v = cr(t), \quad q = \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} - 1$$

Pre podmienenú strednú hodnotu a disperziu platí:

$$\begin{aligned} E(r(T)|r(t)) &= r(t)e^{-\kappa(T-t)} + \theta(1 - e^{-\kappa(T-t)}) \\ \text{Var}(r(T)|r(t)) &= r(t)\frac{\sigma^2}{\kappa}(e^{-\kappa(T-t)} - e^{-2\kappa(T-t)}) + \theta\frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-\kappa(T-t)})^2 \end{aligned}$$

Vidíme, že pre  $T \rightarrow \infty$  je limitná stredná hodnota  $\theta$  a disperzia  $\theta\sigma^2/2\kappa$ . Platí ([11]), že premenná  $2cr(T)$  má necentrálne  $\chi^2$ -rozdelenie ([12]) s  $2q + 2$  stupňami voľnosti a necentrálnym parametrom  $2u$ . Ak  $T \rightarrow \infty$ ,  $r$  má limitné gama rozdelenie  $\Gamma(a, b)$  s parametrami  $a = 2\kappa/\sigma$ ,  $b = 2\kappa\theta/\sigma$  (a potom  $E(r) = \theta$ ,  $\text{Var}(r) = 2\kappa\theta/\sigma^2$ ).

<sup>3</sup>v pôvodnom článku [5] autori tento predpoklad odvodzujú z ekonomického modelu všeobecnej rovnováhy, ktorý popisuje podkladovú ekonomiku a zabezpečuje teoretické zdôvodnenie modelu. Týmto sa však v práci nezaobrám.

Pre hľadajú cenu dlhopisu  $P(r, \tau)$  sa dá, podobne ako v predchádzajúcej časti, odvodiť parciálna diferenciálna rovnica:

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + (\kappa(\theta - r) - \lambda(r, t)\sigma\sqrt{r})\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2 r \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0 \quad (2.9)$$

$$P(r, 0) = 1$$

$\lambda(r, t)$  určuje *trhovú cenu rizika*, ktorá nezávisí od splatnosti dlhopisu.

Riešenie pre cenu dlhopisu sa hľadá v tvare

$$P(r, \tau) = A(\tau)e^{-B(\tau)r}$$

a po dosadení do rovnice (2.9) sa odvodí ODR pre funkcie  $A$ ,  $B$ :

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \kappa\theta BA \\ \dot{B} &= (\kappa + \lambda)B + \frac{1}{2}\sigma^2 B^2 - 1 \end{aligned}$$

Aby existovalo explicitné riešenie, volí sa *trhová cena rizika* v tvare  $\lambda(r, t) = \lambda\sigma\sqrt{r}$ , kde  $\lambda$  je konštanta (a teda ide o ďalší parameter v modeli). Potom sa dajú rovnice explicitne vyriešiť:

$$A(\tau) = \left( \frac{2\eta e^{(\kappa+\lambda+\eta)\tau/2}}{(\kappa + \lambda + \eta)(e^{\eta\tau} - 1) + 2\eta} \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \quad (2.10)$$

$$B(\tau) = \frac{2(e^{\eta\tau} - 1)}{(\kappa + \lambda + \eta)(e^{\eta\tau} - 1) + 2\eta} \quad (2.11)$$

$$\eta = \sqrt{(\kappa + \lambda)^2 + 2\sigma^2}$$

Pre pevné parametre  $\kappa, \theta, \lambda, \sigma$  a danú splatnosť  $\tau$  je výnos  $R$  afinnou funkciou  $r$ :

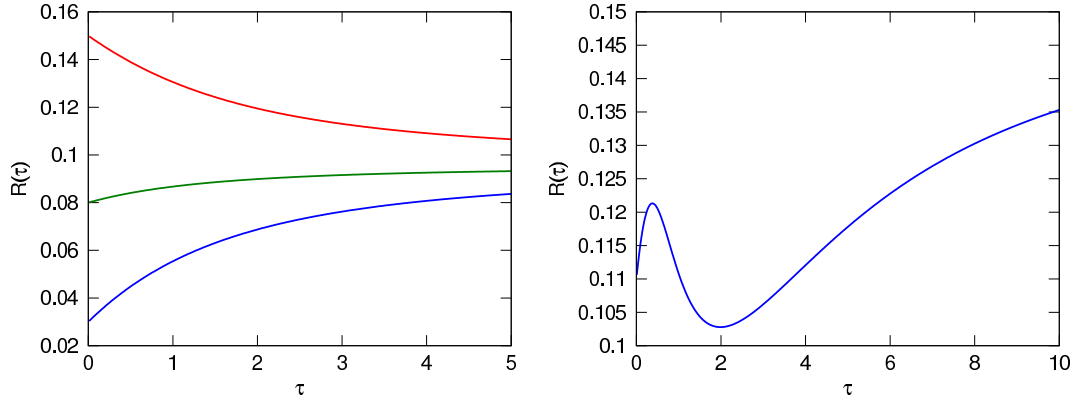
$$R(r, \tau) = -\frac{1}{\tau} \ln A(\tau) + \frac{1}{\tau} B(\tau)r$$

Celá teoretická výnosová krivka je jednoznačne určená hodnotou short-rate – je teda výstupom modelu a nemusí sa zhodovať so skutočnou výnosovou krivkou. Výnosová krivka pre  $\tau \rightarrow \infty$  konverguje k  $R_\infty = 2\kappa\theta/(\eta + \kappa + \lambda)$ . Nárast short-rate zvýši výnosy (citlivosť je vyššia pre nižšie splatnosti), podobne ako zvýšenie parametra  $\theta$  (ktoré sa viac prejaví na vyšších splatnostiach). Nárast  $\sigma^2$  alebo  $\lambda$  zníži výnosy, vplyv  $\kappa$  môže byť v oboch smeroch.

Viacfaktorový CIR model popisuje short-rate ako sumu viacerých *nezávislých* faktorov  $r_i$ , pričom short-rate je ich *súčtom*. Každý faktor je riadený nezávislým CIR procesom s vlastnými parametrami:

$$\begin{aligned} r &= r_1 + r_2 + \dots + r_m \\ dr_i &= \kappa_i(\theta_i - r_i)dt + \sigma_i\sqrt{r_i}dW_i \end{aligned}$$

Tieto zložky short-rate je možné interpretovať rôzne, napríklad ako stabilnú a špekulatívnu zložku úrokovej miery, alebo ako reálny úrok a infláciu. Bližšie informácie



Obr. 2.4: *Vľavo*: typické tvary výnosových kriviek v jednofaktorov CIR modeli. *Vpravo*: príklad výnosovej krivky v dvojfaktorovom modeli – nedá sa dosiahnuť v jednofaktorovom modeli.

o viacfaktorovom CIR modeli sú v pôvodnom CIR článku [5] a odvodenie vzorcov pre opcie a ďalšie deriváty v [6].

Znova nás zaujíma funkcia pre ceny dlhopisov, ktorá tentoraz závisí od maturity a jednotlivých faktorov. Vzhľadom k nezávislosti faktorov sa dá ukázať (viď [2]), že výsledná cena dlhopisu bude súčinom cien prislúchajúcich jednotlivým faktorom v 1-faktorovom modeli:

$$P(r_1, \dots, r_m, \tau) = \left( \prod_{i=1}^m A_i(\tau) \right) \cdot \exp \left( - \sum_{i=1}^m B_i(\tau) r_i \right)$$

Kde  $A_i$ ,  $B_i$  sú funkcie definované v (2.10), (2.11) s dosadenými parametrami  $\kappa_i$ ,  $\theta_i$ ,  $\lambda_i$  a  $\sigma_i$ . Podobne výnos bude súčtom individuálnych výnosov zodpovedajúcich jednotlivým faktorom:

$$R(r_1, \dots, r_m, \tau) = -\frac{1}{\tau} \left( \sum_{i=1}^m \ln A_i(\tau) - B_i(\tau) r_i \right)$$

Motiváciou pre študium viacfaktorových modelov je, že umožňujú dosiahnuť viac tvarov výnosových kriviek, vďaka čomu by mohli lepšie popisovať reálne dáta (viď obrázok 2.4). Okrem toho v jednofaktorovom modeli sú výnosy perfektne korelované so short-rate (keďže sú jej lineárnou funkciou), čo sa v praxi nepozoruje – naopak, tej istej úrovni short-rate prislúchajú v rôznych dňoch rôzne výnosy na vyšších splatnostiach.

Hlavnou nevýhodou viacfaktorového modelu je, že zložky short-rate nie sú sami o sebe pozorovateľné a zvyčajne poznáme iba ich súčet. To spôsobuje problémy napríklad pri kalibrácii modelu, kedy nemáme k dispozícii historické časové rady pre  $r_i$ .

# Kapitola 3

## Dvojfázová min-max metóda

Ťažiskom tejto práce je rozšírenie dvojfázovej minmax metódy Ševčoviča a Urbánovej Csajkovej (článok [1], viď aj prácu [10]) na kalibráciu viacfaktorového CIR modelu. V tejto kapitole najprv stručne popíšem pôvodnú metódu pre jednofaktorový model a potom načrtnem jej možné rozšírenie na prípad viacerých faktorov.

### 3.1 Kalibrácia jednofaktorového modelu

*Min-max* metóda používa na kalibráciu dáta o trhovách výnosoch aj o pozorovanom priebehu short-rate, pričom kalibrácia prebieha v dvoch fázach. Prvá fáza spočíva v nájdení množiny parametrov, ktoré *minimalizujú* sumu štvorcov odchýlok medzi teoretickými a pozorovanými trhovými výnosmi. Riešenie tohto problému v pôvodnej sústave parametrov  $\kappa, \theta, \lambda, \sigma$  nie je jednoznačné a vhodnou transformáciou sa dá ukázať, že existuje celá jednorozmerná krivka parametrov, ktorá minimalizuje účelovú funkciu. V druhej fáze sa preto z tejto podmnožiny parametrov vyberá ten bod, ktorý *maximalizuje* funkciu vierohodnosti na pozorovanom priebehu short-rate (ale existujú aj iné možnosti pre voľbu spätnej transformácie).

Hlavnou myšlienkou metódy je transformácia zo štyroch pôvodných na tri transformované parametre  $\beta, \xi, \rho$ , v ktorých by mala mať prvá fáza (v ktorej ide vlastne o nelineárnu metódu najmenších štvorcov) jednoznačné riešenie. Transformácia vyzerať nasledovne: nech sú dané pôvodné parametre  $\kappa, \theta, \lambda, \sigma$  a  $\eta = \sqrt{(\kappa + \lambda)^2 + 2\sigma^2}$ . Potom

$$\beta = e^{-\eta}, \quad \xi = \frac{\kappa + \lambda + \eta}{2\eta}, \quad \rho = \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} \quad (3.1)$$

a funkcie  $A, B$  vystupujúce vo vzorci pre cenu dlhopisu majú podobu

$$A(\beta, \xi, \rho|\tau) = \left( \frac{\beta^{(1-\xi)\tau}}{\xi(1-\beta^\tau) + \beta^\tau} \right)^\rho \quad (3.2)$$

$$B(\beta, \xi, \rho|\tau) = -\frac{1}{\ln \beta} \frac{1 - \beta^\tau}{\xi(1 - \beta^\tau) + \beta^\tau} \quad (3.3)$$

Teoretický výnos možno potom vyjadriť ako funkciu transformovaných parametrov, short-rate a času do splatnosti:

$$R(\beta, \xi, \rho|r, \tau) = -\frac{1}{\tau} \ln A(\beta, \xi, \rho|\tau) + \frac{1}{\tau} B(\beta, \xi, \rho|\tau)r$$

Ak vieme vypočítať teoretické výnosy, môžeme kalibrovať model na reálnych výnosových krivkách metódou nelineárnej regresie. Nech  $k$  je počet dní, z ktorých používame údaje,  $n$  je počet splatností, pre ktoré sa na trhu určujú výnosy,  $\tau_j$  je  $j$ -ta splatnosť,  $\bar{R}_j^{(t)}$  je pozorovaný výnos pre  $j$ -tu splatnosť a  $t$ -ty deň,  $r(t)$  je pozorovaný short-rate pre  $t$ -ty deň. Výstupom prvej fázy je trojica parametrov  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\xi}$ ,  $\hat{\rho}$ , ktorá minimalizuje sumu štvorcov odchýlok medzi teoretickými a pozorovanými výnosmi:

$$\min_{\beta, \xi, \rho} \sum_{t=1}^k \sum_{j=1}^n \left( \bar{R}_j^{(t)} - R(\beta, \xi, \rho | r(t), \tau_j) \right)^2$$

Odhadovanie parametrov metódou najmenších štvorcov je v štatistike často používaná metóda. Jej použitie je odôvodnené, ak predpokladáme, že náhodné chyby v modeli sú nezávislé normálne rozdelené s nulovou strednou hodnotou a rovnakou disperziou.

Cieľom druhej fázy je následne spätná transformácia do pôvodných parametrov. Táto spätná transformácia nie je jednoznačná, ale dá sa parametrizovať pomocou voľby trhovej ceny rizika  $\lambda$  (kde  $\lambda$  môže nadobudnúť ľubovoľnú hodnotu z  $(-\infty, \lambda_{\max})$ ):

$$\left( \hat{\beta}, \hat{\xi}, \hat{\rho} \right) \xrightarrow{\text{zvoľ } \lambda} \left( \kappa(\lambda), \theta(\lambda), \lambda, \sigma(\lambda) \right) \quad (3.4)$$

$$\kappa(\lambda) = -\lambda - (2\xi - 1) \ln \beta, \quad \sigma = -\sqrt{2\xi(1 - \xi)} \ln \beta, \quad \theta(\lambda) = \frac{\rho\sigma^2}{2\kappa(\lambda)}$$

$$\lambda_{\max} = -(2\xi - 1) \ln \beta$$

Voľbou  $\lambda$  teda určíme konkrétny bod na jednorozmernej  $\lambda$ -parametrizovanej krivke pôvodných parametrov, z ktorej každý bod minimalizuje sumu štvorcov odchýlok z prvej fázy. Transformovaný parameter  $\sigma$  je určený pevne (nezávisí od  $\lambda$ ), zatiaľ čo prípustné kombinácie  $\kappa$  a  $\theta$  ležia na hyperbole parametrizovanej cez  $\lambda$ . Na vybranie ich konkrétnej kombinácie je možné zohľadniť informáciu o časovom priebehu short-rate (ktorú sme doteraz nevyužili), alebo externú informáciu:

- Trhovú cenu rizika budeme voľiť tak, aby výsledné parametre  $\kappa$ ,  $\theta$ ,  $\sigma$  maximalizovali funkciu vierohodnosti pre pozorovaný priebeh short-rate:

$$\max_{\lambda} L(\kappa(\lambda), \theta(\lambda), \sigma(\lambda) | r(1), \dots, r(k)).$$

Čo sa týka tvaru funkcie vierohodnosti, je možné použiť buď Nowmanovu aproximáciu [13], alebo presné tranzitívne hustoty stochastického procesu, ktoré pre CIR model zodpovedá preškálovanému necentrálnemu  $\chi^2$  rozdeleniu (2.8).

- Zvolíme  $\theta$  exogénne a dorátame z neho  $\kappa$  a  $\lambda$  na základe vzťahu (3.4). Je možné zvoliť interval pre  $\theta$ , čím získame intervalové odhady (tento prístup je použitý aj v práci [14]).



## 3.2 Rozšírenie na viac faktorov

Popísanú min-max metódu nie je možné použiť priamo na kalibráciu viacfaktorového modelu, keďže faktory short-rate nie sú priamo pozorovateľné (pozorovateľný je iba ich súčet). Vďaka tomu nie je možné vyrátať teoretické výnosy (lebo tej istej hodnote short-rate zodpovedajú rôzne výnosové krivky, v závislosti od rôzneho rozkladu na faktory) a tým pádom ani účelovú funkciu v prvej fáze. Z tohto dôvodu je nutné odhadovať hodnotu faktorov tiež z dát, zároveň s parametrami. V tejto časti práce popíšem spôsob, ktorým je možné odhad faktorov riešiť efektívne ako *vnorenú* úlohu počas odhadu parametrov, vďaka čomu je možné ľahko rozšíriť min-max metódu aj na prípad viacerých faktorov.

Pri  $m$ -faktorovom CIR modeli je taktiež možné vykonať transformáciu premenných podľa vzťahu (3.1) pre každý faktor osobitne: premenným  $\kappa_i$ ,  $\theta_i$ ,  $\lambda_i$ ,  $\sigma_i$  zodpovedajú transformované parametre  $\beta_i$ ,  $\xi_i$ ,  $\rho_i$ . Funkcie  $A$ ,  $B$  sú vyjadrené pomocou transformovaných premenných podľa vzťahov (3.2),(3.3). Označme si vektory parametrov  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_i)$ ,  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_i)$ ,  $\boldsymbol{\rho} = (\rho_i)$  a vektor faktorov short-rate  $\mathbf{r} = (r_i)$  pre  $i = 1, \dots, m$ . Teoretický výnos je potom funkciou  $m \times 3$  transformovaných parametrov,  $m$  faktorov a času do splatnosti:

$$R(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\rho} | \mathbf{r}, \tau) = \sum_{i=1}^m \left( -\frac{1}{\tau} \ln A(\beta_i, \xi_i, \rho_i | \tau) + \frac{1}{\tau} B(\beta_i, \xi_i, \rho_i | \tau) r_i \right) \quad (3.5)$$

Podobne ako v predchádzajúcej sekcii, chceme odhadnúť transformované parametre nelineárnou regresiou na trhových výnosoch. Nech  $k$  je počet dní, z ktorých používame údaje,  $n$  je počet splatností,  $\tau_j$  je  $j$ -ta splatnosť,  $\bar{R}_j^{(t)}$  je pozorovaný výnos pre  $j$ -tu splatnosť a  $t$ -ty deň,  $\bar{r}(t)$  je pozorovaný short-rate a  $\mathbf{r}(t)$  je vektor faktorov short-rate v dni  $t$  (ten budeme hľadať). V prvej fáze bude účelová funkcia znovu rozdiel medzi teoretickými a pozorovanými výnosmi, ktorá ale závisí aj od rozkladu short-rate na faktory (tento rozklad je pre každý deň iný, preto  $\mathbf{r}(\cdot) = \{\mathbf{r}(t), t \in 1 \dots k\}$  obsahuje  $k \times m$  hodnôt):

$$F(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}(\cdot)) = \sum_{t=1}^k \sum_{j=1}^n \left( \bar{R}_j^{(t)} - R(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\rho} | \mathbf{r}(t), \tau_j) \right)^2 \quad (3.6)$$

Keďže faktorový rozklad  $\mathbf{r}(\cdot)$  nepoznáme,  $F$  budeme minimalizovať cez parametre aj cez faktory, pričom faktory majú byť nezáporné (keďže sa riadia CIR procesom) a ich súčet sa má rovnať short-rate:

$$\min_{\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}(\cdot)} F(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}(\cdot)) \quad \text{za podmienky:} \quad (3.7)$$

$$r_i(t) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m r_i = \bar{r}(t) \quad \text{pre } t = 1, \dots, k$$

Riešiť túto úlohu priamo by bolo z dôvodu vysokej dimenzie náročné – potrebujeme odhadovať  $k \times m + m \times 3$  premenných (napr. pre kalibráciu dvojfaktorového

modelu zo štvrtročných dát by sme mali okolo 130 premenných). Budeme preto riešiť ekvivalentnú úlohu, kde minimalizáciu podľa faktorového rozkladu riešime ako vnorenú úlohu počas minimalizácie cez parametre:

$$\min_{\beta, \xi, \rho} \underbrace{\min_{r(\cdot)} F(\beta, \xi, \rho, r(\cdot))}_{=f(\beta, \xi, \rho)} = \min_{\beta, \xi, \rho} f(\beta, \xi, \rho)$$

Pokiaľ vieme riešiť efektívne vnútornú minimalizáciu, vieme vyjadriť účelovú funkciu závislú iba od parametrov  $f(\beta, \xi, \rho)$ , ktorú možno potom minimalizovať podobne ako v prípade jednofaktorového modelu.

Pri vnútornej minimalizácii (teda pri výpočte  $f$ ) riešime problém odhadu faktorov pre dané fixné parametre. Keďže teoretické výnosy závisia iba od faktorového rozkladu v aktuálnom dni, tento odhad možno urobiť pre každý deň osobitne:

$$f(\beta, \xi, \rho) = \min_{r(\cdot)} F(\beta, \xi, \rho, r(\cdot)) = \sum_{t=1}^k \min_{r(t)} \sum_{i=1}^n \left( \bar{R}_i^{(t)} - R(\beta, \xi, \rho | r(t), \tau_i) \right)^2. \quad (3.8)$$

Počas každého vyhodnotenia  $f$  je potrebné  $k$ -krát odhadovať faktory  $r_1, \dots, r_m$ , ktoré minimalizujú odchýlku teoretickej a pozorovanej jednodňovej výnosovej krivky.

Čiastočne podobný prístup je použitý aj v diplomovej práci T. Leška [15], ktorá sa tiež zaoberá kalibráciou viacfaktorového CIR modelu. Faktorový rozklad sa v nej hľadá riešením sústavy rovníc tak, aby teoretická krivka presne prechádzala  $m$  bodmi na pozorovanej výnosovej krivke a následne sa vypočíta súčet likelihood funkcií na odhadnutom priebehu jednotlivých faktorov, ktorý sa maximalizuje cez parametre. Odhad faktorov metódou najmenších štvorcov umožňuje vnoriť tento odhad do celkovej minimalizácie pri odhade parametrov, vďaka čomu je možné použiť transformáciu premenných a min-max metódu. Ďalším rozdielom je, že odhad faktorov minimalizáciou umožňuje ľahko zohľadniť ohraničenia na nezápornosť faktorov, ktoré v Leškovej práci spôsobovali numerické ťažkosti.

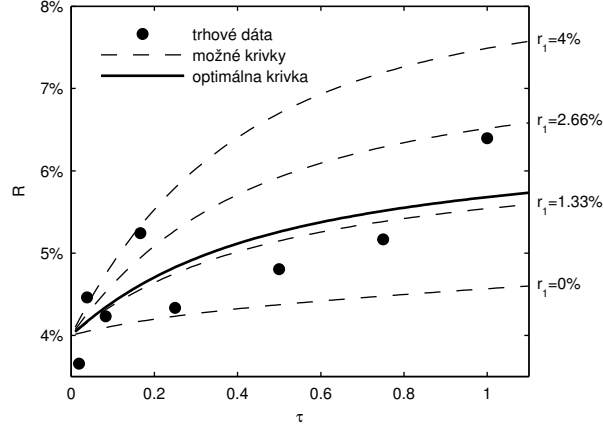
Potrebujeme teda odhadovať faktory  $r_i$  (ktorých je  $m$ ) metódou najmenších štvorcov na dátach z jedného dňa (index dňa  $t$  už neuvádzam):

$$\begin{aligned} & \min_{r_1, \dots, r_m} \sum_{j=1}^n \left( \bar{R}_j - R(\beta, \xi, \rho | r_1, \dots, r_m, \tau_j) \right)^2 = \\ & = \min_{r_1, \dots, r_m} \sum_{j=1}^n \left( \bar{R}_j - \sum_{i=1}^m \left( -\frac{1}{\tau_j} \ln A(\beta_i, \xi_i, \rho_i | \tau_j) + \frac{1}{\tau_j} B(\beta_i, \xi_i, \rho_i | \tau_j) r_i \right) \right)^2 \end{aligned}$$

Inými slovami, ak parametre  $\beta, \xi, \rho$  sú fixné, teoretická výnosová krivka stále môže nadobúdať rôzne tvary v závislosti od rozkladu short-rate na jednotlivé zložky. Za odhad zložiek  $r_1, \dots, r_m$  zoberieme ten rozklad, ktorého výnosová krivka minimalizuje sumu štvorcov odchýlok od pozorovaných dát. Tento postup je ilustrovaný na obrázku 3.1.

Vďaka tomu, že CIR model patrí medzi afinné modely (vzťah (3.5)), tento problém sa redukuje na úlohu lineárnej regresie s ohraničeniami:

$$\min_{r_1, \dots, r_m} \|C\vec{r} - d\|, \quad \sum_{i=1}^m r_i = \bar{r}, \quad r_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.9)$$



Obr. 3.1: Rôzne výnosové krivky v 2-faktorovom CIR modeli zodpovedajúce rôznym rozkladom short-rate. Rozklad  $r_1, r_2$  odhadneme voľbou výnosovej krivky, ktorá najlepšie zodpovedá pozorovaným dátam.

kde

$$C_{ji} = \frac{B(\beta_i, \xi_i, \rho_i | \tau_j)}{\tau_j}, \quad \bar{r} = (r_1, \dots, r_m)^T, \quad d_j = R_j + \sum_{i=1}^m \frac{\ln A(\beta_i, \xi_i, \rho_i | \tau_j)}{\tau_j}$$

a ohraničenia zabezpečujú nezápornosť faktorov a rovnosť ich súčtu pozorovanej short-rate  $\bar{r}$ .

Z numerického hľadiska ide pri úlohe (3.9) o minimalizáciu konvexnej kvadratickej funkcie s lineárnymi ohraničeniami, čo je úloha kvadratického programovania, ktorá sa dá spoľahlivo a efektívne numericky riešiť. Dôležitým predpokladom je  $m < n$ , teda faktorov má byť menej ako bodov na výnosovej krivke. V opačnom prípade by sa mohlo stať, že vhodnou voľbou rozkladu by teoretická krivka prechádzala cez všetky pozorovania a  $f = 0$ , čím by akákoľvek ďalšia minimalizácia bola zbytočná. Model s takým množstvom faktorov by však z praktického hľadiska zrejme tak či tak nemal zmysel.

Čo sa týka počtu faktorov, dá sa ukázať, že viac faktorov umožňuje dosiahnuť nižšie alebo rovné hodnoty účelovej funkcie:

**Tvrdenie.** *Nech sú dané dáta  $\bar{R}_i^{(t)}, \bar{r}(t)$  pre  $i = 1, \dots, n, t = 1, \dots, k$ . Nech  $m$  označuje počet faktorov a  $g(m)$  je hodnota účelovej funkcie  $F(\beta, \xi, \rho, \mathbf{r}(\cdot))$ , definovanej v (3.6), v bode minima (cez  $m \times 3$  parametrov a  $m \times k$  zložiek rozkladu). Potom  $g(m)$  je neklesajúca v  $m$ , t.j. so zvyšujúcim sa počtom faktorov sa minimálna odchýlka teoretických a pozorovaných kriviek nezvyšuje.*

*Dôkaz.* Keďže účelová funkcia je definovaná ako rozdiel teoretických a pozorovaných výnosov, zrejme stačí ukázať, že s počtom faktorov  $m+1$  je možné pri danej hodnote short-rate vhodnou voľbou parametrov a rozkladu short-rate na zložky dosiahnuť presne také isté teoretické výnosy ako pre  $m$  faktorový model s danými parametrami a rozkladom. Optimálna hodnota účelovej funkcie pre  $m+1$  faktorov bude potom menšia alebo rovná hodnote  $m+1$  faktorového modelu, ktorý replikuje teoretické výnosy (a teda aj hodnotu účelovej funkcie) pre optimálny  $m$  faktorový model. Toto najprv dokážeme pre  $m = 1$ .

Majme jednofaktorový model s parametrami  $\beta, \xi, \rho$  a s hodnotou short-rate  $r$ . Definujeme si dvojfaktorový model s parametrami  $\beta_1 = \beta_2 = \beta, \xi_1 = \xi_2 = \xi, \rho_1 = \rho_2 = \rho/2$  a zložkami short-rate  $r_1 = r_2 = r/2$ . Vyrátame výnosy v dvojfaktorovom modeli:

$$R(\beta_1, \beta_2, \xi_1, \xi_2, \rho_1, \rho_2 | r_1, r_2, \tau) = \sum_{i=1}^2 \left( -\frac{1}{\tau} \ln A(\beta_i, \xi_i, \rho_i | \tau) + \frac{1}{\tau} B(\beta_i, \xi_i, \rho_i | \tau) r_i \right)$$

Keďže vo funkcii  $B$  nevystupuje parameter  $\rho$  a ostatné parametre sú rovnaké v jednofaktorovom aj v zložkách dvojfaktorového modelu, platí:

$$B(\beta_i, \xi_i, \rho_i | \tau) = B(\beta, \xi, \rho | \tau)$$

Navyše, vo funkcii  $A$  vystupuje  $\rho$  len v exponente, a teda (keďže  $\rho_i = \rho/2$ ):

$$\ln A(\beta_i, \xi_i, \rho_i | \tau) = \frac{1}{2} \ln A(\beta, \xi, \rho | \tau)$$

S využitím uvedených vzťahov sa dá ľahko nahliadnuť, že

$$\begin{aligned} R(\beta_1, \beta_2, \xi_1, \xi_2, \rho_1, \rho_2 | r_1, r_2, \tau) &= \frac{1}{\tau} (-\ln A(\beta, \xi, \rho | \tau) + B(\beta, \xi, \rho | \tau) r) = \\ &= R(\beta, \xi, \rho | r, \tau) \end{aligned}$$

a teda pre dané dáta a jednofaktorový model vieme skonštruovať dvojfaktorový model, s ktorým dosiahneme rovnaké teoretické výnosy a tým pádom aj rovnakú hodnotu účelovej funkcie.

Pre  $m > 1$  sa dá podobné rozšírenie na  $m + 1$  faktorov spraviť analogicky – keďže výnos vo viacfaktorovom modeli možno chápať ako súčet výnosov prislúchajúcich jednotlivým zložkám, stačí si vybrať jeden faktor a rozložiť ho na dva rovnakým spôsobom ako je uvedené vyššie.  $\square$

Výsledkom prvej fázy je odhad transformovaných parametrov  $\beta_i, \xi_i, \rho_i$  a priebehu faktoru  $r_i(t)$  pre  $i = 1, \dots, m$  a  $t = 1, \dots, k$ . V druhej fáze chceme nájsť spätnú transformáciu do priestoru pôvodných parametrov s využitím informácie z *odhadnutého* priebehu  $r_i(t)$ . Tento problém je zrejme možné riešiť nezávisle pre každý faktor  $i$  osobitne rovnako ako v sekcii 3.1.

### 3.3 Zhrnutie

Rozšírená metóda na odhad parametrov viacfaktorového CIR modelu sa dá zhrnúť nasledovne:

---

**Algoritmus 1** Min-max metóda - fáza 1

---

**Vstupy**

- vektor pozorovaných realizácii short-rate  $\bar{r}(t)$  pre  $k$  dní ( $t = 1, \dots, k$ )
- vektor splatností, pre ktoré existujú trhové výnosy  $\tau_j$  ( $j = 1, \dots, n$ )
- hodnoty  $k \times n$  trhových výnosov  $R_j^{(t)}$ , kde  $R_j^{(t)}$  je trhový výnos v dni  $t$  pre splatnosť  $\tau_j$

**Prvá fáza**

- minimalizuje sa funkcia  $f(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\rho})$ :

$$f(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\rho}) = \sum_{t=1}^k RSS_t(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\rho}) \quad (3.10)$$

$$RSS_t(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\rho}) = \min_{r_1(t), \dots, r_m(t)} \sum_{j=1}^n \left( \bar{R}_j^{(t)} - R(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\rho} | r_1(t), \dots, r_m(t), \tau_j) \right)^2$$

pričom teoretický výnos  $R$  je definovaný vzťahom (3.5) a  $RSS_t$  je možné vypočítať riešením úlohy (3.9). Výsledkom prvej fázy je odhad parametrov  $\beta_i$ ,  $\xi_i$ ,  $\rho_i$  a odhad zložiek short-rate  $r_i(t)$  pre  $i = 1, \dots, m$  a  $t = 1, \dots, k$ .

---

---

**Algoritmus 2** Min-max metóda - fáza 2

---

**Vstupy**

- transformované parametre z prvej fázy  $\beta, \xi, \rho$
- vektory zložiek short-rate odhadnutých z prvej fázy  $r_i(t)$  ( $t = 1, \dots, k$ ,  $i = 1, \dots, m$ )

**Druhá fáza**

- s použitím výsledkov prvej fázy pre každý faktor  $i$  maximalizujeme funkciu vierohodnosti

$$\max_{\lambda_i} \log L(\kappa(\lambda_i), \theta(\lambda_i), \sigma(\lambda_i) | r_i(1), \dots, r_i(k)) \quad (3.11)$$

kde spätná  $\lambda$ -parametrizovaná transformácia do pôvodných parametrov je definovaná v (3.4) a funkcia vierohodnosti je uvedená v (2.6). Výsledkom sú parametre  $\lambda_i, \kappa_i, \lambda_i, \theta_i$  pre  $i = 1, \dots, m$ .

ALEBO:

- s použitím výsledkov prvej fázy pre každý faktor  $i$  určíme parameter  $\theta_i$ , na základe čoho dopočítame ostatné parametre v spätnej transformácii.
-

# Kapitola 4

## Implementácia metódy

V tejto kapitole sú uvedené detailnejšie informácie o praktickej implementácii viacfaktorovej min-max metódy a výsledky jej funkčnosti na simulovných dátach. Na numerické výpočty bol použitý prevažne softvér Octave<sup>1</sup>.

### 4.1 Numerické metódy

V prvej fáze min-max metódy minimalizujeme účelovú funkciu závislú od transformovaných parametrov  $f(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\rho})$  definovanú v (3.8). Pri jej výpočte musíme riešiť vnorený problém viazanej lineárnej regresie (3.9), v ktorom odhadneme rozklad short-rate na faktory. Uvedený problém je možné transformovať na úlohu kvadratického programovania:

$$\min_{r_1, \dots, r_m} \frac{1}{2} r^T Q r + c^T r \quad \text{za podmienky} \quad \sum r_i = \bar{r}, \quad r_i \geq 0$$
$$Q = C^T C, \quad c = -B^T d$$

Keďže  $Q = B^T B$  je pozitívne definitná, minimalizujeme konvexnú funkciu na konvexnej množine a teda existujú efektívne algoritmy na hľadanie minima. Pre účely tejto práce (a z dôvodu urýchlenia výpočtov) je použitá vo Fortrane skompilovaná funkcia DWNLS (popísaná v [16]) z knižnice pre numerické výpočty SLATEC<sup>2</sup>, ktorá je špecializovaná na riešenie úlohy lineárnej regresie s nezápornými premennými a s väzbami v tvare rovností.

Aby sme zabránili nejednoznačnosti v rozklade (riešenia, v ktorých rovnakým spôsobom zmeníme poradie sád parametrov a odhadnutých zložiek short-rate, sú ekvivalentné), odhady  $r(t)_i$  usporiadame (v zmysle  $i$ ) vždy lexikograficky. Po nájdení rozkladu  $r_1, \dots, r_m$  (pre každý deň osobitne) vypočítame hodnotu účelovej funkcie, pričom z numerických dôvodov ju preškálujeme tak, aby zodpovedala štandardnej odchýlke pre jeden bod na výnosovej krivke:

$$f(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\rho}) = \left( \frac{1}{kn} \sum_{t=1}^k \min_{\mathbf{r}(t)} \sum_{i=1}^n \left( \bar{R}_i^{(t)} - R(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\rho} | \mathbf{r}(t), \tau_i) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

<sup>1</sup>voľne dostupný (GNU GPLv3 licencia) na <http://www.octave.org>, syntax a funkcie sú do značnej miery kompatibilné s programom MATLAB

<sup>2</sup>dostupná na <http://www.netlib.org/slatec/>

Ak už máme zadanú účelovú funkciu  $f(\beta, \xi, \rho)$ , musíme ju minimalizovať s použitím vhodnej numerickej metódy. Pripomíname, že ide o optimalizáciu s ohraničeniami  $0 < \beta_i < 1$ ,  $0 < \xi_i < 1$ ,  $0 < \rho_i$  ( $i \in \{1, \dots, m\}$ )<sup>3</sup>. Ide o problém globálnej optimalizácie, pričom o funkcii  $f$  nevieme povedať, či je konvexná – preto nie je možné vylúčiť existenciu lokálnych miním, ktoré môžu spôsobovať problémy pri minimalizácii „klasickými“ metódami a závislosť výsledného riešenia od použitého štartovacieho bodu. Za takýchto okolností je možné použiť heuristické algoritmy, ktoré zahŕňajú prvky náhodnosti, no majú šancu konvergovať ku globálnemu minimu (pre ich stručný prehľad viď napr. [17]). V jednofaktorovej min-max metóde používajú autori ([1]) genetický algoritmus, v tejto práci použijeme metódu simulovaného žihania implementovanú ako funkcia `samin` v knižnici Octave-Forge<sup>4</sup>, ktorá je založená na algoritme z článku [18] (podobne aj parametre metódy su zväčša prevzaté z odporúčaných hodnôt v článku). Základná myšlienka simulovaného žihania pri minimalizácii všeobecnej funkcie  $g(x)$  sa dá zhrnúť v algoritme:

---

### Algoritmus 3 Simulované žihanie

---

- Na začiatku iterácie máme daný bod  $x$ , z jeho okolia náhodne zvolíme  $x'$ .
- Ak  $g(x') \leq g(x)$ ,  $x'$  je akceptovaný ako začiatkový bod pre ďalšiu iteráciu.
- Ak  $g(x') > g(x)$ , o akceptácii  $x'$  rozhodne Metropolisovo kritérium -  $x'$  je akceptovaný s pravdepodobnosťou  $p = e^{-\frac{g(x')-g(x)}{T}}$ , ktorá závisí od parametra  $T$  (teplota) – vyššia teplota znamená vyššiu šancu na akceptovanie  $x'$ . Ak je nový bod odmietnutý, v ďalšej iterácii sa znova začína z pôvodného bodu  $x$ .
- Počas optimalizácie sa postupne znižuje teplota aj polomer okolia, z ktorého sa vyberá kandidát na nový bod. Vďaka tomu má na začiatku algoritmus možnosť uniknúť z lokálneho minima a na konci sa ustáliť na globálnom optime.
- Optimalizácia sa skončí keď funkčné hodnoty v niekoľkých po sebe idúcich zmenách teploty sa neodlišujú o viac ako stanovené malé číslo  $\epsilon$ .

---

V druhej fáze, ak na spätnú transformáciu používame maximalizáciu funkcie vierohodnosti, potrebujeme pre každý faktor maximalizovať jednorozmernú funkciu (3.11). Na výpočet funkcie vierohodnosti (2.6) použijeme presné podmienené hustoty (2.8), ktoré zodpovedajú preškálovanému necentrálnemu chí-kvadrát rozdeleniu<sup>5</sup> (viď [19]) a na jej minimalizáciu použijeme funkciu `fminbnd`.

Alternatívnou možnosťou pre druhú fázu je určiť parameter  $\theta_i$  a dopočítať ostatné parametre  $\kappa_i$  a  $\lambda_i$  ( $\sigma_i$  je dané transformáciou pevne). Keďže je ťažké určiť

---

<sup>3</sup>V praxi tieto ohraničenia zmeníme na neostre ako  $\beta_i \in \langle \epsilon, 1 - \epsilon \rangle$ ,  $\xi_i \in \langle \epsilon, 1 - \epsilon \rangle$ ,  $\rho_i \in \langle \epsilon, \rho_{max} \rangle$ , kde zvolíme  $\epsilon = 10^{-6}$ ,  $\rho_{max} = 10$

<sup>4</sup><http://octave.sourceforge.net/>

<sup>5</sup>kvôli numerickej ťažkosti pri rátaní vierohodnostnej funkcie priamo pomocou vzťahu (2.8) bola použitá funkcia `dchisq` z knižnice Rmath (skompilovaná v jazyku C), ktorá je súčasťou štatistického prostredia R. Tá ráta hustotu ako sumu hustôt centrálného  $\chi^2$  rozdelenia s Poissonovskými váhami (viď aj [12])



$i$	$\kappa_i$	$\theta_i$	$\lambda_i$	$\sigma_i$
1	1.8341	0.05148	-0.1253	0.1543
2	0.005212	0.03083	-0.06650	0.06689

Tabuľka 4.1: Parametre CIR procesov použité pri generovaní simulovaných dát, prevzaté z [6]

$\theta_i$  exogénne (vzhľadom k tomu, že faktory sú nepozorovateľné a ich význam nie je presne definovaný), v našom prípade je možné určiť  $\theta_i$  ako priemer z odhadnutého radu  $r_i(t)$ . Tento postup je opodstatnený vďaka tomu, že  $\theta_i$  je stredná hodnota limitného rozdelenia premennej  $r_i$ , ide teda vlastne o metódu momentov, v ktorej pomocou jedného parametra ( $\lambda_i$ ) zabezpečíme zhodu teoretického prvého momentu a pozorovaného prvého momentu.

## 4.2 Simulované dáta

Keďže chceme používať simulované dáta, pre úplnosť uvádzame postup na simulovanie CIR procesu. Nech je daná začiatočná hodnota  $r_0$ , časový krok  $\Delta t$  a parametre  $\kappa$ ,  $\theta$ ,  $\sigma$ . Realizácie budeme generovať postupne, t.j. generujeme  $r_i$  pomocou podmienenej hustoty procesu za predpokladu, že poznáme  $r_{i-1}$ . S použitím značenia zo vzťahu (2.8) (za  $T - t$  dosadíme časový krok  $\Delta t$  a za  $r(t)$  dosadíme  $r_{i-1}$ ), najprv vygenerujeme náhodnú premennú  $X$  z necentrálneho  $\chi^2$  rozdelenia s  $2q+2$  stupňami voľnosti a necentrálnym parametrom  $2u$  a následne položíme  $r_i = X/2c$ . Algoritmus na generovanie náhodných čísel z necentrálneho  $\chi^2$  rozdelenia s parametrami  $(n, \delta)$  je uvedený v [11]:

---

**Algoritmus 4** Generovanie náhodných čísel z necentrálneho chí-kvadrát rozdelenia

---

```

if  $n > 1$  then
  Generuj  $Y \sim \chi^2(n - 1)$ 
  Generuj  $Z \sim N(0, 1)$ 
  return  $X = Y + (Z + \sqrt{\delta})^2$ 
else
  Generuj  $N \sim Poiss(\delta/2)$ 
  return  $X \sim \chi^2(n + 2N)$ 
end if

```

---

Pokiaľ nie je uvedené inak, výpočty v tejto kapitole používajú rovnaký súbor simulovaných dát s dvoma faktormi na 250 dní (parametre stochastických procesov pre faktory sú v tabuľke 4.1). K nim sú pre každý deň vypočítané teoretické výnosy pre 8 splatností (od 1 týždňa po 1 rok). Keďže k výnosom nie je pridaný žiadny šum, optimálna hodnota účelovej funkcie by mala byť 0.

Vstupom pre algoritmus je short-rate vypočítaná ako súčet faktorov a matica výnosov. Po prvej fáze získavame odhad transformovaných parametrov, ktorý je spolu s originálnymi v tabuľke 4.2, a odhad rozkladov short-rate znázornený spolu s originálnymi hodnotami na grafe 4.1. Tieto odhady poslúžia ako vstupy do druhej

hodnota účelovej funkcie:  $4.654e - 08$

$i$	originál			odhad		
	$\beta_i$	$\xi_i$	$\rho_i$	$\beta_i$	$\xi_i$	$\rho_i$
1	0.17859	0.99597	7.93158	0.17900	0.99650	8.79968
2	0.89340	0.22813	0.07183	0.93373	0.07889	0.00000

Tabuľka 4.2: Originálne a odhadnuté transformované parametre pre simulované dáta

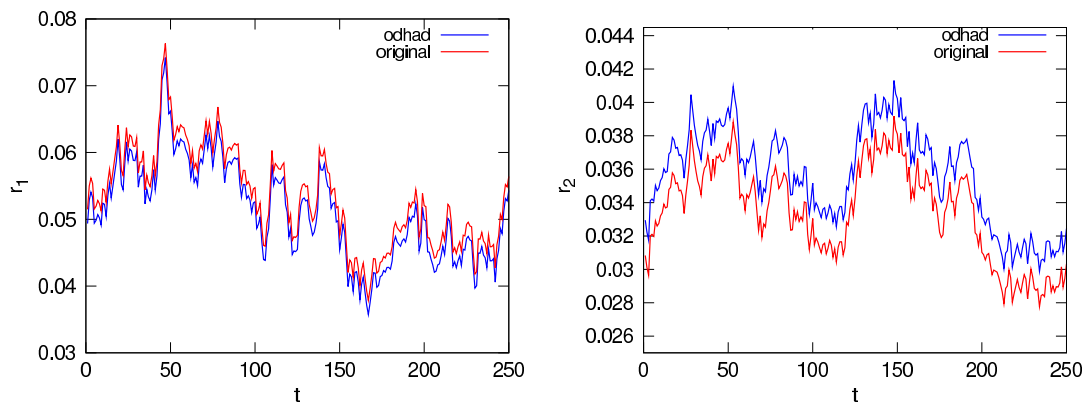
$i$	vierohodnosť				priemer			
	$\kappa_i$	$\theta_i$	$\lambda_i$	$\sigma_i$	$\kappa_i$	$\theta_i$	$\lambda_i$	$\sigma_i$
1	1.67551	0.05427	0.03282	0.14376	1.77197	0.05131	-0.06364	0.14376
2	0.01419	0.00000	-0.07194	0.02614	0.00000	0.03563	-0.05775	0.02614

Tabuľka 4.3: Odhadnuté pôvodné parametre pre simulované dáta – vľavo odhad maximalizáciou vierohodnosti, vpravo určením  $\theta_i$

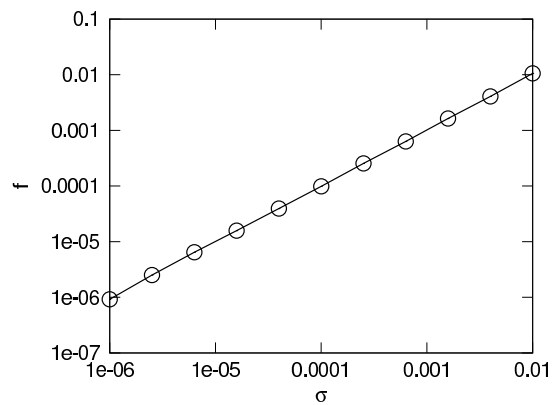
fázy, kde odhadujeme trhovú cenu rizika a k nej prislúchajúce pôvodné parametre, ktoré sa nachádzajú v tabuľke 4.3.

- Dosiahnutá hodnota účelovej funkcie je veľmi blízko 0, čo nasvedčuje, že metóde sa podarilo dosiahnuť dobrý fit.
- Odhad faktorov je blízky pôvodným hodnotám a líši sa prakticky iba o konštantný posun. Zdá sa, že metóda zachováva tvar priebehu pôvodných faktorov.
- Pri pohľade na tabuľku s odhadnutými transformovanými parametrami vidíme, že kým hodnoty pre  $\beta$  a  $\xi$  sú relatívne blízko pôvodným hodnotám, odhady pre parameter  $\rho$  vykazujú väčšiu chybu (čo môže nasvedčovať, že účelová funkcia je málo citlivá na tieto parametre).
- V druhej fáze sú výsledky oboch metód podobné pre prvý faktor, no líšia sa pre druhý faktor. Maximalizácia vierohodnosti odhadla parameter  $\theta$  príliš blízko nule, zatiaľ čo odhad cez priemer  $r_i$  vychádza korektne. Pri parametri  $\kappa$  je situácia opačná, napriek tomu môžeme za rozumnejší výsledok pravdepodobne pokladať ten druhý.

Zaujímáť nás môže ešte fungovanie metódy, ak výnosy sú zaťažené chybou. Ak k výnosom prirátame nezávislý šum so štandardnou odchýlkou  $\sigma$  a tieto použijeme ako vstup pre minimalizáciu, môžeme čakať hodnotu účelovej funkcie v minime tiež približne na úrovni  $\sigma$ . Na obrázku 4.2 je zobrazená závislosť medzi úrovňou šumu a hodnotou účelovej funkcie na konci prvej fázy (pre tie isté dáta ako boli použité vyššie). Vidíme, že očakávaný vzťah platí veľmi dobre, čo nasvedčuje tomu, že metóde sa darí nájsť minimum účelovej funkcie.



Obr. 4.1: Porovnanie časových radov pôvodných a odhadnutých faktorov  $r_1$  (vľavo) a  $r_2$  (vpravo) pre simulované dáta



Obr. 4.2: Vzťah medzi šumom so št. odchýlkou  $\sigma$  pridaným k výnosom a dosiahnutou hodnotou účelovej funkcie.

# Kapitola 5

## Aplikácia na reálne dáta

Na záver sa pokúsime aplikovať navrhnutú metódu na reálne trhové dáta. Na kalibráciu použijeme výnosy z medzibankového peňažného trhu EÚ (EONIA + EURIBOR), v ktorom si banky navzájom požičiavajú peniaze na kratšie splatnosti (do jedného roka). Do kalibrácie zahrnieme údaje z roku 2008, ktorý rozdelíme na 4 kvartály.

Stručne popíšeme použité dáta: EONIA (Euro OverNight Index Average) a EURIBOR (Euro Interbank Offered Rate) sú referenčné sadzby na jeden deň, resp. na dlhšie splatnosti v eurozóne a sú vyrátané ako vážený priemer sadzieb zúčastnených bánk. Deskriptívne štatistiky sú v tabuľke 5.1 (údaje sú dané priamo ako počet percent), dáta sú dostupné na internete <sup>1</sup>. Priebeh overnightu a 12-mesačného výnosu je znázornený na obrázku 5.1. Pri pohľade na tabuľku aj na graf vidno, že hlavne v poslednom štvrtroku sa na úrokových mierach prejavila prebiehajúca ekonomická kríza, ktorá priniesla znižovanie sadzieb zo strany centrálnych bánk (a tým pádom aj vyššiu volatilitu).

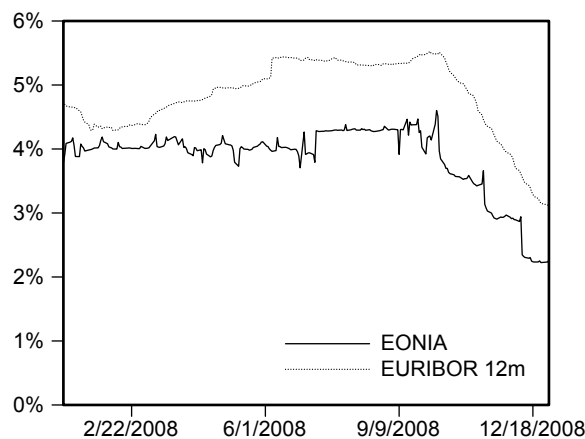
Pokúsime sa o kalibráciu modelu pre jednotlivé štvrtroky. Najprv nás môže zaujímať, či skutočne model s vyšším počtom faktorov umožňuje dosiahnuť lepší fit. Na obrázku 5.2 je znázornená závislosť medzi počtom faktorov a dosiahnutou hodnotou účelovej funkcie. Naozaj vidno, že s vyšším počtom faktorov je možné dosiahnuť lepšiu zhodu medzi teoretickými a pozorovanými výnosmi.

Následne sa pokúsime o odhad parametrov dvojfaktorového modelu. Výsledky samotnej kalibrácie sú v tabuľke 5.2 a rozklad na zložky je na obrázku 5.3. Pri pohľade na výsledky môžeme vysloviť niekoľko pozorovaní:

- Hodnoty účelovej funkcie (ktorá zodpovedá štandardnej odchýlke pre jeden bod na výnosovej krivke), sa pohybujú rádovo v stotinách percenta, čo naznačuje dobrú zhodu modelu s pozorovanými výnosmi.
- Na druhej strane, odhad parametra  $\kappa$  vychádza v dvoch prípadoch veľmi blízko 0, čo nie je uspokojivé. Pre prvý štvrtrok dostávame nereálne vysoký odhad pre  $\theta_2$  pri použití maximalizácie vierohodnosti (alternatívna metóda, pri ktorej stanovíme  $\theta_i$  ako priemer odhadnutého časového radu  $r_i$ , takýmto problémom netrpí).

---

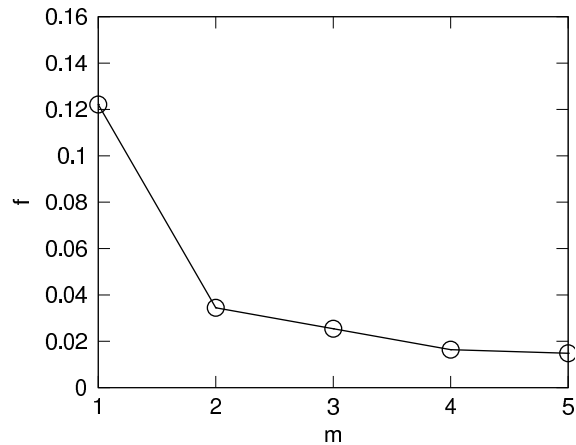
<sup>1</sup><http://www.euribor.org/>



Obr. 5.1: Priebek overnightu a 12-mesačného výnosu v eurozóně v roku 2008.

$\tau$	Q1		Q2		Q3		Q4	
	priemer	št. odch.	priemer	št. odch.	priemer	št. odch.	priemer	št. odch.
ON	4.0451	(0.0791)	4.0008	(0.0936)	4.2527	(0.1416)	3.1731	(0.6336)
1t	4.1470	(0.0557)	4.2204	(0.0596)	4.4217	(0.1303)	3.4328	(0.7919)
2t	4.1688	(0.0535)	4.2884	(0.0582)	4.4583	(0.1280)	3.5425	(0.7745)
3t	4.1932	(0.0535)	4.3402	(0.0576)	4.4886	(0.1293)	3.6594	(0.7706)
1m	4.2251	(0.0641)	4.4090	(0.0492)	4.5394	(0.1443)	3.9193	(0.8196)
2m	4.3505	(0.0861)	4.6622	(0.0728)	4.7800	(0.0762)	4.1311	(0.7799)
3m	4.4763	(0.1362)	4.8593	(0.0732)	4.9817	(0.0600)	4.2424	(0.8039)
4m	4.4788	(0.1376)	4.8801	(0.0914)	5.0577	(0.0647)	4.2726	(0.8034)
5m	4.4799	(0.1406)	4.9019	(0.1126)	5.1174	(0.0583)	4.2897	(0.8030)
6m	4.4804	(0.1433)	4.9250	(0.1347)	5.1756	(0.0464)	4.3072	(0.8003)
7m	4.4786	(0.1451)	4.9479	(0.1554)	5.1994	(0.0430)	4.3214	(0.7962)
8m	4.4772	(0.1467)	4.9689	(0.1742)	5.2267	(0.0421)	4.3333	(0.7946)
9m	4.4762	(0.1481)	4.9916	(0.1922)	5.2578	(0.0409)	4.3465	(0.7924)
10m	4.4758	(0.1493)	5.0123	(0.2107)	5.2914	(0.0407)	4.3567	(0.7919)
11m	4.4751	(0.1505)	5.0324	(0.2278)	5.3292	(0.0447)	4.3668	(0.7929)
12m	4.4757	(0.1510)	5.0545	(0.2452)	5.3678	(0.0503)	4.3781	(0.7934)

Tabuľka 5.1: Priemery (v %) a štandardné odchýlky pre EONIA (overnight) a EURIBOR (vyššie splatnosti) z roku 2008 podľa štvrtrokov.



Obr. 5.2: Účelová funkcia po minimalizácii ako funkcia počtu faktorov.

- Dá sa povedať, že vo väčšine prípadov sú výsledky oboch alternatívnych prístupov v druhej fáze kvalitatívne podobné – jedna zo zložiek má vyššiu volatilitu  $\sigma$ , vyššiu rýchlosť mean-reversion  $\kappa$ , zápornejšiu trhovú cenu rizika  $\lambda$  a s výnimkou druhého štvrtého roka zároveň nižšiu úroveň mean-reversion  $\theta$ .
- Z grafov zobrazujúcich rozklad vidno, že kým v prvej polovici roka sa faktory správajú viac-menej stabilne, v druhej polovici sa situácia mení a nastáva „výmena“ faktorov. To by mohlo byť spôsobené napríklad zmenou tvaru výnosovej krivky, ktorý sa dá lepšie vysvetliť cez dovtedy menej výrazný faktor.

1. štvrtrok  $f = 0.034456$

$i$	vierohodnosť				priemer			
	$\kappa_i$	$\theta_i$	$\lambda_i$	$\sigma_i$	$\kappa_i$	$\theta_i$	$\lambda_i$	$\sigma_i$
1	21.39484	0.67808	-9.81161	1.70337	23.63291	0.61386	-12.04968	1.70337
2	0.00000	23367.24055	0.09209	0.00013	0.00000	3.43120	0.09209	0.00013

2. štvrtrok  $f = 0.060077$

$i$	vierohodnosť				priemer			
	$\kappa_i$	$\theta_i$	$\lambda_i$	$\sigma_i$	$\kappa_i$	$\theta_i$	$\lambda_i$	$\sigma_i$
1	15.69565	3.85956	-4.51522	5.73874	15.68893	3.86122	-4.50850	5.73874
2	0.00000	0.02986	-1.32364	0.28812	0.00000	0.13963	-1.32364	0.28812

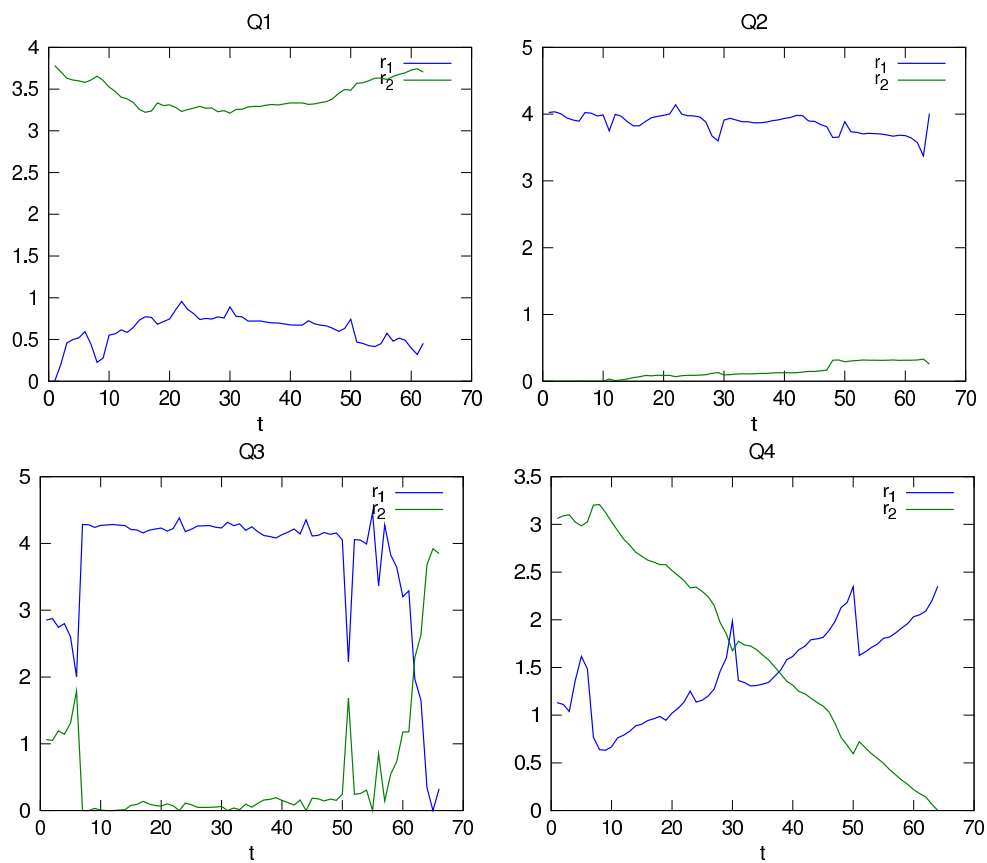
3. štvrtrok  $f = 0.056862$

$i$	vierohodnosť				priemer			
	$\kappa_i$	$\theta_i$	$\lambda_i$	$\sigma_i$	$\kappa_i$	$\theta_i$	$\lambda_i$	$\sigma_i$
1	11.03680	2.92043	2.30394	2.53899	8.64814	3.72707	4.69261	2.53899
2	28.11400	0.99854	-22.67038	8.30118	53.40750	0.52564	-47.96387	8.30118

4. štvrtrok  $f = 0.102435$

$i$	vierohodnosť				priemer			
	$\kappa_i$	$\theta_i$	$\lambda_i$	$\sigma_i$	$\kappa_i$	$\theta_i$	$\lambda_i$	$\sigma_i$
1	25.24889	1.64130	-12.04692	2.87892	28.51257	1.45343	-15.31061	2.87892
2	6.88025	0.00776	-6.36734	0.10336	0.03106	1.71968	0.48185	0.10336

Tabuľka 5.2: Odhadnuté pôvodné parametre pre EURIBOR – vľavo odhad maximalizáciou vierohodnosti, vpravo určením  $\theta_i$



Obr. 5.3: Rozklad short-rate na dve zložky pre jednotlivé štvrtroky



# Kapitola 6

## Záver

V práci sme sa zaoberali rozšírením dvojfázovej min-max metódy pre kalibráciu CIR modelu na viacfaktorový model, ktorý modeluje short-rate ako súčet viacerých nezávislých zložiek. Keďže tieto zložky nie sú priamo pozorovateľné, v prvej fáze, ktorá zahŕňa minimalizáciu odchýlky medzi teoretickými a pozorovanými výnosovými krivkami, ich odhadujeme spolu s transformovanými parametrami. Odhad faktorov je možné previesť na vnorený problém lineárnej regresie s ohraničeniami, vďaka čomu nám stačí minimalizovať „vonkajšiu“ účelovú funkciu závislú iba od parametrov. Ako výsledok prvej fázy získame popri odhade pre transformované parametre aj odhad priebehu jednotlivých faktorov, ktorý následne v druhej fáze využijeme na spätnú transformáciu do priestoru pôvodných parametrov.

Metódu sme odskúšali na simulovaných aj reálnych dátach s výsledkami, ktoré možno aspoň čiastočne označiť za rozumné. V prípade „presných“ simulovaných dát metóda úspešne odhadla priebeh faktorov a viac-menej aj parametre. Pre „nepresné“ simulované dáta s rôznymi úrovňami pridaného šumu bola dosiahnutá očakávaná hodnota účelovej funkcie. Pri reálnych dátach sa potvrdilo, že model s vyšším počtom faktorov sa vie presnejšie priblížiť k pozorovaným trhovým výnosom.

Predmetom ďalšieho výskumu by mohlo byť detailnejšie štúdium vlastností takto získaných odhadov na simulovaných dátach (vrátane pridaného šumu), ich chyba, miera neistoty a konvergencia. S tým súvisí čiastočne aj problematika použitých numerických metód pri minimalizácii – keďže v práci použitá metóda simulovaného žihania je časovo pomerne náročná, možno by sa dala časová náročnosť znížiť vhodným nastavením parametrov simulovaného žihania, alebo použitím inej metódy.

# Literatúra

- [1] Daniel Ševčovič and Alexandra Urbánová Csajková. On a two-phase minmax method for parameter estimation of the Cox, Ingersoll, and Ross interest rate model. *Central European Journal of Operational Research*, 13:169–188, 2005. <http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/papers/cl26.pdf>.
- [2] D. Ševčovič, B. Stehlíková, and K. Mikula. *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*. Nakladateľstvo STU, 2009. ISBN 978-80-227-3014-3.
- [3] Yue-Kuen Kwok. *Mathematical models of financial derivatives*. Springer, 2nd edition, 2008.
- [4] K.C. Chan, G.A. Karolyi, F.A. Longstaff, and A.B. Sanders. An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate. *Journal of Finance*, 47(3):1209–1227, 1992.
- [5] John C. Cox, Jr. Ingersoll, Jonathan E., and Stephen A. Ross. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53(2):385–407, 1985.
- [6] R.R. Chen and L. Scott. Pricing Interest Rate Options in a Two-Factor Cox–Ingersoll–Ross Model of the Term Structure. *Review of Financial Studies*, pages 613–636, 1992.
- [7] M.J. Brennan and E.S. Schwartz. An equilibrium model of bond pricing and a test of market efficiency. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, pages 301–329, 1982.
- [8] T.C. Santamaria, E.S. Schwartz, and C.C. del Aguila. Convergence within the EU: Evidence from interest rates. *Economic Notes*, 29(2), 2000.
- [9] F.A. Longstaff and E.S. Schwartz. Interest rate volatility and the term structure: A two-factor general equilibrium model. *Journal of Finance*, pages 1259–1282, 1992.
- [10] Alexandra Urbánová Csajková. *Calibration of term structure models*. PhD thesis, Comenius University, 2007. <http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/phd/urbanova/>.
- [11] P. Glasserman. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer, 2004.

- [12] Wikipedia. Noncentral chi-square distribution — wikipedia, the free encyclopedia, 2009. [http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Noncentral\\_chi-square\\_distribution&oldid=279861678](http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Noncentral_chi-square_distribution&oldid=279861678) [online, navštívené 10.4.2009].
- [13] KB Nowman. Gaussian estimation of single-factor continuous time models of the term structure of interest rates. *Journal of Finance*, pages 1695–1706, 1997.
- [14] Miroslav Antol. Analýza jedno a dvojfaktorových modelov derivátov úrokových mier. Master's thesis, Univerzita Komenského, 2006. <http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/2006/antol/diplomovka.pdf>.
- [15] Tomáš Leško. Metóda faktorovej dekompozície pri kalibrácii viacfaktorových modelov. Master's thesis, Univerzita Komenského, 2007. <http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/2007/lesko/diplomovka.pdf>.
- [16] Richard J. Hanson and Karen H. Haskell. Algorithm 587: Two algorithms for the linearly constrained least squares problem. *ACM Trans. Math. Softw.*, 8(3):323–333, 1982.
- [17] Manfred GILLI and Peter WINKER. A review of heuristic optimization methods in econometrics. Swiss Finance Institute Research Paper Series 08-12, Swiss Finance Institute. [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=1140655](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1140655).
- [18] W.L. Goffe. SIMANN: a global optimization algorithm using simulated annealing. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, 1(3):169–176, 1996.
- [19] Kamil Kladičko. Maximum likelihood estimation of the Cox-Ingersoll-Ross process: the MATLAB implementation. In *Technical Computing Prague 07*, 2007. [http://dsp.vscht.cz/konference\\_matlab/MATLAB07/prispevky/kladivko\\_k/kladivko\\_k.pdf](http://dsp.vscht.cz/konference_matlab/MATLAB07/prispevky/kladivko_k/kladivko_k.pdf).