SVOČ 2009

Název práce:

Homogenní stochastická diferenciální rovnice s multiplikativním frakcionálním gaussovským šumem

Autor:

Jan Bártek

Vedoucí práce:

Doc. RNDr. Bohdan Maslowski, DrSc.

Fakulta:

Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy

Abstrakt

Tato práce popisuje vztah mezi řešením jistého typu nelineární stochastické parciální diferenciální rovnice s multiplikativním šumem, kdy řídícím procesem je frakcionální Brownův pohyb (fBm), a řešením její deterministické verze. Řešení stochastické rovnice je explicitně vyjádřeno pomocí řešení deterministické rovnice a trajektorií fBm. Řešení se uvažují v silném i slabém smyslu. Integrál podle fBm s Hurstovým indexem H lze definovat různými způsoby. Zde je pro hodnoty $H > 1/2$ uvažován integrál Stratonovičova typu definovaný po trajektoriích. Získaný vztah je použit ke zkoumání některých vlastností řešení stochastické rovnice difúze v porézním prostředí.

Tato práce se stane v nějaké formě součástí diplomové práce autora.

Klíčová slova a fráze: Frakcionální Brownův pohyb, řešení stochastické diferenciální rovnice, Itôova formule

Úvod

V článku [4] se studuje vztah mezi řešeními deterministické parciální diferenciální rovnice

$$v_t = F(v, Dv, D^2v, \ldots),$$

kde F je tzv. homogenní funkce, a její stochastické verze

$$\mathrm{d}u = F(u, Du, D^2u, \ldots)\,\mathrm{d}t + u(f(t)\,\mathrm{d}W(t) + g(t)\,\mathrm{d}t), \tag{1}$$

kde W je standardní Brownův pohyb a rovnice je chápána v Itôově smyslu. Vychází, že za jistých předpokladů je mezi řešeními těchto dvou rovnic vzájemně jednoznačný vztah, vyjádřený explicitní formulí. Důležitou roli v tomto vztahu hraje tzv. geometrický Brownův pohyb.

Nabízí se otázka, jestli existuje podobný vztah i v situaci, kdy je stochastická rovnice řízena frakcionálním Brownovým pohybem (fBm) s Hurstovým indexem H. Situaci zde ztěžuje poměrně komplikovaná teorie integrace podle fBm. Přirozenou analogií rovnice (1) by bylo použití Skorochodova stochastického integrálu, který jistým způsobem odpovídá Itôovu stochastickému integrálu pro Brownův pohyb. Při této volbě však narazíme na potíže v podobě dosti komplikovaného tvaru Itôovy formule. V této práci se proto vydáme, pro hodnoty $H < 1/2$, cestou stochastického integrálu definovaného po trajektoriích, který je obdobou Stratonovičova integrálu.

Práce je členěna do pěti sekcí. V první sekci jsou uvedeny některé základní vlastnosti fBm. Ve druhé sekci je zaveden stochastický integrál. Ve třetí sekci je ukázáno, že pro bilineární rovnici platí stejný vztah jako v "nefrakcionálním" případě a že pro nelineární rovnici dostáváme alespoň existenci řešení. Zde jsou uvažována klasická řešení. Ve čtvrté sekci ukážeme existenci explicitní formule pro vztah mezi zobecněnými řešeními deterministické a stochastické rovnice porézního prostředí (porous medium equation, pme). V poslední sekci jsou pomocí vlastností tzv. Barenblattova řešení pme odvozeny některé vlastnosti řešení její stochastické verze.

Rovnice porézního prostředí je rovnice tvaru

$$v_t = \Delta(v^m)$$

a v závislosti na hodnotě parametru m popisuje různé fyzikální děje. Například vedení tepla, proudění plynu v porézním prostředí, prosakování podzemní vody, radiaci plazmatu, šíření populace a další. Studium vlastností její stochastické verze je aktuální téma.

1 Frakcionální Brownův pohyb

Definice 1.1. *Nechť $H \in (0,1)$ je konstanta. Frakcionální Brownův pohyb (fBm) s Hurstovým parametrem H je spojitý centrovaný stochastický gaussovský proces $(B^{(H)}(t))_{t\geq 0}$ s kovarianční funkcí*

$$\mathbb{E}\Big[B^{(H)}(t)B^{(H)}(s)\Big] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}).$$

Pro hodnotu Hurstova parametru $H = 1/2$ je fBm standardní Brownův pohyb. Přímo z Definice 1.1 vyplývá, že fBm $B^{(H)}$ má následující vlastnosti:

1. $B^{(H)}(0) = 0$ a $\mathbb{E}[B^{(H)}(t)] = 0 \quad \forall t \geq 0$.
2. $B^{(H)}$ je gaussovský proces a $\mathbb{E}[B^{(H)}(t)]^2 = t^{2H},\ t \geq 0,\ H \in (0,1)$.
3. $B^{(H)}$ má stacionární přírůstky, tj. $B^{(H)}(t+s) - B^{(H)}(s)$ má stejné rozdělení jako $B^{(H)}(t)$ pro $t, s \geq 0$, platí totiž:
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B^{(H)}(t+s) - B^{(H)}(s)]^2 &= \mathbb{E}[B^{(H)}(t+s)]^2 + \mathbb{E}[B^{(H)}(s)]^2 - 2\,\mathbb{E}[B^{(H)}(t+s)\,\cdot \\ &\cdot\ B^{(H)}(s)] = (t+s)^{2H} + s^{2H} - ((t+s)^{2H} + s^{2H} \\ &-\ |t+s-s|^{2H}) = t^{2H} = \mathbb{E}[B^{(H)}(t)]^2\end{aligned}$$
4. $B^{(H)}$ má spojité trajektorie.

V dalším budeme $B^{(H)}$ uvažovat na fixovaném filtrovaném pravděpodobnostním prostoru $\mathbb{F} = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ splňující obvyklé podmínky úplnosti $\mathcal{F}$ a zprava spojitosti $\mathcal{F}_t$ a $B^{(H)}$ je $\mathcal{F}_t$-adaptovaný. Frakcionální Brownův pohyb má celou řadu zajímavých vlastností. Zde jich několik stručně a bez důkazů uvedeme, zdrojem těchto a mnoha dalších informací o fBm je kniha [2], kde může případný zájemce nalézt podrobnosti.

1. Reprezentace stochastickým integrálem
fBm lze vyjádřit jako Itôův stochastický integrál podle standardního Brownova pohybu $(B_t)_{t\geq 0}$:
$$B^{(H)}(t) = \int_0^t K_H(t,s)\,\mathrm{d}B(s), \qquad t \geq 0,$$
kde, pro $H > 1/2$,
$$K_H(t,s) = c_H s^{1/2-H} \int_s^t |u-s|^{H-3/2} u^{H-1/2}\,\mathrm{d}u,$$
kde $c_H = [H(2H-1)/\beta(2-2H, H-1/2)]^{1/2}$ a $t > s$, β je beta funkce,
a pro $H < 1/2$,
$$K_H(t,s) = b_H \left[\left(\frac{t}{s}\right)^{H-1/2} (t-s)^{H-1/2} - \left(H - \frac{1}{2}\right) s^{1/2-H} \int_s^t (u-s)^{H-1/2} u^{H-3/2}\,\mathrm{d}u\right],$$
kde $b_H = [2H/((1-2H)\beta(1-2H, H+1/2))]^{1/2}$ a $t > s$.

2. Korelace mezi přírůstky
Pro $H \neq 1/2$ jsou přírůstky fBm korelované. Přesněji, kovariance mezi $B^{(H)}(t+h) - B^{(H)}(t)$ a $B^{(H)}(s+h) - B^{(H)}(s)$, kde $s + h \leq t$ a $t - s = nh$, je
$$\rho_H(n) = \frac{1}{2} h^{2H}[(n+1)^{2H} + (n-1)^{2H} - 2n^{2H}].$$
Speciálně, přírůstky typu $B^{(H)}(t+h) - B^{(H)}(t)$ a $B^{(H)}(t+2h) - B^{(H)}(t+h)$ jsou pozitivně korelované pro $H > 1/2$ a negativně korelované pro $H < 1/2$.

3. Soběpodobnost
   Pro každou hodnotu $a > 0$ mají procesy $(B^{(H)}(at), t \geq 0)$ a $(a^H B^{(H)}(t), t \geq 0)$ stejné rozdělení.

4. Hölderovská spojitost trajektorií
   Tato vlastnost bude zvláště důležitá pro definování stochastického integrálu. Připomeňme, že funkce $f : I \to \mathbb{R}$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je interval, je hölderovsky spojitá stupně $0 < \alpha \leq 1$ (α-hölderovská), jestliže

$$\|f\|_\alpha := \sup_{t\in I} |f(t)| + \sup_{t,s\in I} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha} < \infty.$$

   Množinu α-Hölderovských funkcí na intervalu I značíme $C^\alpha(I)$. Dále označme $C^{\beta-}(I) = \bigcap_{0<\alpha<\beta} C^\alpha(I)$.

   Věta 1.1. *Nechť $H \in (0,1)$. Existuje modifikace fBm, jejíž trajektorie jsou skoro jistě α-Hölderovsky spojité pro každé $0 < \alpha < H$.*

   Důkaz.
   Podle Kolmogorovova kriteria má proces $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ spojitou modifikaci, jestliže existují konstanty $\alpha \geq 1$, $\beta > 0$ a $k > 0$ tak, že pro každý kompaktní interval $K \subset \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[|X(t) - X(s)|^\alpha] \leq k|t-s|^{1+\beta}, \qquad t, s \in K,$$

   a trajektorie této modifikace jsou lokálně γ-hölderovsky spojité pro každé $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$.
   Pro každé $\alpha > 0$ máme

$$\mathbb{E}\Big[|B^{(H)}(t) - B^{(H)}(s)|^\alpha\Big] = \mathbb{E}\Big[|B^{(H)}(1)|^\alpha\Big]|t-s|^{\alpha H},$$

   takže podle Kolmogorovova kritéria dostáváme hölderovskou spojitost trajektorií $B^{(H)}$ řádu menšího než H, tj. $B^{(H)} \in C^{H-}([0,T])\ \forall T > 0$.

   □

2 Integrál po trajektoriích (Stratonovičův)

Stochastický integrál pro frakcionální Brownův pohyb lze zavést různými způsoby. Zde budeme předpokládat, že hodnota Hurstova indexu $H > 1/2$, a definujeme integrál po trajektoriích pomocí frakcionálního kalkulu, viz. např. [5], [2], Appendix B, a [6], kapitola 1 a 2.

Nechť $\alpha \in (0,1)$. Řekneme, že funkce $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ má Weylovu derivaci $D^\alpha_{0+}f$,

$$D^\alpha_{0+}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{f(t)}{t^\alpha} + \alpha \int_0^t \frac{f(t) - f(\lambda)}{(t-\lambda)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}\lambda\right),$$

jestliže integrál napravo existuje pro skoro všechna $t \in (0,T)$, kde Γ je Eulerova gamma funkce. Analogicky definujeme $D^\alpha_{T-}f(t)$ jako

$$D^\alpha_{T-}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{f(t)}{(T-t)^\alpha} + \alpha \int_t^T \frac{f(t) - f(\lambda)}{(t-\lambda)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}\lambda\right).$$

Weylovy derivace jsou inverzemi k následujícím frakcionálním integrálům. Předpokládejme, že $\phi \in L^1([0,T])$. Levostranný, resp. pravostranný frakcionální Riemannův-Liouvillův integrál ϕ stupně α je definován pro skoro všechna $t \in (0,T)$ rovností

$$I_{0+}^{\alpha}\phi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\lambda)^{\alpha-1}\phi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda,$$

resp.

$$I_{T-}^{\alpha}\phi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^T (t-\lambda)^{\alpha-1}\phi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda.$$

Předpokládejme, že $f = I_{0+}^{\alpha}\phi$, kde $\phi \in L^1([0,T])$. Potom Weylova derivace f existuje a $D_{0+}^{\alpha}f = \phi$. Podobný vztah platí i pro pravostranný frakcionální integrál.

Nechť $W^{\alpha,1}(0,T)$ je prostor měřitelných funkcí $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ takových, že

$$|f|_{\alpha,1} := \int_0^T \left(\frac{|f(s)|}{s^{\alpha}} + \int_0^s \frac{|f(s) - f(\lambda)|}{(s-\lambda)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}\lambda \right) \mathrm{d}s < \infty,$$

kde $0 < \alpha < 1/2$ je pevné. Dále nechť g je spojitá funkce na $[0,T]$ taková, že $\Lambda_{\alpha}(g) < \infty$, kde

$$\Lambda_{\alpha}(g) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \sup_{0<s<t<T} \left(\frac{|g(t) - g(s)|}{(t-s)^{1-\alpha}} + \int_s^t \frac{|g(\lambda) - g(s)|}{(\lambda - s)^{2-\alpha}}\,\mathrm{d}\lambda \right).$$

Nyní můžeme definovat zobecněný Stieltjesův integrál $\int_0^T f\,\mathrm{d}g$ funkce f podle g jako

$$\int_0^T f\,\mathrm{d}g := \int_0^T D_{0+}^{\alpha}f(s) D_{T-}^{1-\alpha}g_{T-}(s)\,\mathrm{d}s, \tag{2}$$

kde $g_{T-}(t) = g(t) - g(T)$. Při výše uvedených předpokladech integrál $\int_0^T f\,\mathrm{d}g$ nezávisí na volbě α (se kterým f a g splňují výše uvedené předpoklady), integrál $\int_0^t f\,\mathrm{d}g$ existuje pro všechna $t \in [0,T]$ a platí

$$\int_0^t f\,\mathrm{d}g = \int_0^T f 1_{(0,t)}\,\mathrm{d}g.$$

Navíc platí následující odhad

$$\left| \int_0^t f\,\mathrm{d}g \right| \leq \Lambda_{\alpha}(g)|f|_{\alpha,1}.$$

Následující lemma popisuje $\int f\,\mathrm{d}g$ coby funkci horní meze v případě, že f i g jsou hölderovské funkce. Důkaz a další detaily lze nalézt v [6], Lemma 2.1.9.

Lemma 2.1. *Nechť $f \in C^{\alpha+\varepsilon}([0,T])$, $g \in C^{1-\alpha+\varepsilon}([0,T])$, $0 < \varepsilon < \alpha \wedge (1-\alpha)$, a nechť $G(t) := \int_0^t f\,\mathrm{d}g$. Potom $G \in C^{1-\alpha}([0,T])$.*

Poznámka

Integrál $\int f\,\mathrm{d}g$ v předchozím lemmatu je dobře definován, neboť $C^{\alpha+\varepsilon}([0,T]) \subset W^{\alpha,1}(0,T)$ a $\Lambda_{\alpha}(g) < \infty$ pro každou $g \in C^{1-\alpha+\varepsilon}([0,T])$, $\varepsilon > 0$. Podrobnosti opět viz. [6].

Nyní již můžeme definovat integrál podle $B^{(H)}$.

Definice 2.1. *Nechť frakcionální Brownův pohyb $B^{(H)}$ je definován na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a nechť Hurstův index $H \in (1/2, 1)$. Pro funkci $f \in W^{\alpha,1}(0,T)$, kde $\alpha \in (1-H, 1/2)$, budeme integrál*

$$\int_0^T f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s)$$

chápat ve smyslu definovaném rovností (2) po trajektoriích, což má smysl, protože $\Lambda(B^{(H)}) < \infty$ $\mathbb{P}$-s.j.

Právě definovaný integrál je integrálem Stratonovičova typu, nebo se také nazývá symetrický integrál, a lze ho definovat limitou

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^T f(t) \Big[B^{(H)}(t+\varepsilon) - B^{(H)}(t-\varepsilon) \Big] \,\mathrm{d}t,$$

pokud tato limita existuje v pravděpodobnosti.

Pro takto definovaný stochastický integrál platí následující verze Itôovy formule, další podrobnosti a důkaz lze nalézt v [6], Theorem 2.7.2, Theorem 2.7.3 a Remark 2.7.4.

Věta 2.1. *Nechť $Y_t^i = \int_0^t f_i(s)\,\mathrm{d}B_s^{H_i}$, kde $H_1 = 1/2$, $H_i \in (1/2, 1)$, $2 \le i \le m-1$, $Y_t^m = \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s$, $\int_0^t f_1^2(s)\,\mathrm{d}s < \infty$ s.j., $f_i \in C^{\beta_i}[0,t]$ s.j. pro $\beta_i + H_i > 1$, $\int_0^t |g(s)|\,\mathrm{d}s < \infty$ s.j., $F = F(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F \in C^1(\mathbb{R}_+) \times C^2(\mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R}^{n-1})$, integrály $\int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(Z_s) f_1(s) \right)^2 \mathrm{d}s$, $\int_0^t |\frac{\partial F}{\partial t}(Z_s)|\,\mathrm{d}s$, $\int_0^t |\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(Z_s)| f_1^2\,\mathrm{d}s$ a $\int_0^t |\frac{\partial F}{\partial x_m}(Z_s) g(s)|\,\mathrm{d}s$ jsou konečné skoro jistě, $\frac{\partial F}{\partial x_i}(Z_s) f_i \in C^\gamma[0,t]$ s.j. pro $\gamma + H_i > 1$ a každé $t > 0$, kde $Z_s = (s, Y_s^1, \ldots, Y_s^m)$. Potom*

$$\begin{aligned} F(t, Y_t^1, \ldots, Y_t^m) &= F(0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(Z_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_1}(Z_s) f_1(s)\,\mathrm{d}B_s^{H_1} \\ &+ \sum_{i=2}^{m-1} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(Z_s) f_i(s)\,\mathrm{d}^\circ B_s^{H_i} + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_m}(Z_s) g(s)\,\mathrm{d}s \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(Z_s) f_1^2(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{3}$$

Poznamenejme, že integál podle B^{H_1} v rovnosti (3) je Itôovým integrálem, integrály podle B^{H_2} až $B^{H_{m-1}}$ jsou integrály z Definice 2.1.

V dalším bude užitečný následující důsledek předchozí věty:

Důsledek 2.1. *Nechť $Y_t = \int_0^t a(s)\,\mathrm{d}^\circ B_s^H + \int_0^t b(s)\,\mathrm{d}s$ (předpoklady na a, resp. b, nechť jsou stejné jako na f_2, resp. g, výše) a Y^m je jako výše, $\int_0^t |Y(s)g(s)|\,\mathrm{d}s < \infty$, $\int_0^t |Y^m(s)b(s)|\,\mathrm{d}s < \infty$ a $Y^m(s)a(s) \in C^\gamma([0,t])$ s.j., kde $\gamma + H > 1$, pak*

$$Y_t Y_t^m = \int_0^t Y(s)g(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t Y^m(s)b(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t Y^m(s)a(s)\,\mathrm{d}^\circ B^H(s). \tag{4}$$

3 Rovnice a její řešení

Uvažujme rovnici

$$v_t = F(v, Dv, D^2 v, \ldots),\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d, \tag{5}$$

s počáteční podmínkou $v(0,x) = v_0(x)$. Neznámou v rovnici (5) je funkce $v = v(t,x)$, funkce F je dána, $v_t = \partial v/\partial t$ a $D^k v$ je obecná k-tá derivace v podle x.

Dále uvažujme stochastickou verzi rovnice (5) pro neznámé náhodné pole $u = u(t,x)$, $t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d$:

$$du = F(u, Du, D^2u, \dots)dt + u(f(t)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(t) + g(t)\,\mathrm{d}t), \tag{6}$$

se stejnou počáteční podmínkou jako v (5), tj. $u(0,x) = u_0(x) = v_0(x)$, kde $f \in C^{\alpha+\varepsilon}([0,T])\ \forall T > 0$, $0 < \varepsilon < \min\{1-\alpha,\ \alpha,\ H+\alpha-1\}$, a $g \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

V dalším budeme zkoumat vztah mezi řešeními rovnic (5) a (6). K tomu je potřeba pojem řešení rovnice vhodně definovat.

Definice 3.1. *Funkce $v : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je klasickým řešením rovnice (5) , jestliže splňuje:*

1. *v je spojitá,*
2. *všechny potřebné parciální derivace funkce v vzhledem k x existují a jsou spojité v proměnné x a γ-hölderovsky spojité v proměnné t na $[0,T]\ \forall T > 0$, kde $\gamma > 1-H$.*
3. *Je splněna rovnost*

$$v(t,x) = v_0(x) + \int_0^t F(v(s,x), Dv(s,x), D^2v(s,x), \dots)\,\mathrm{d}s$$

pro všechna $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$.

Markovský čas τ v následující definici má význam především v případě, že řešení příslušné deterministické rovnice exploduje v konečném čase, v tom případě má τ význam např. času exploze.

Definice 3.2. *Nechť τ je markovský čas. Náhodné pole $u = u(t,x)$ je klasickým řešením rovnice (6), jestliže existuje množina $\Omega^* \subset \Omega$, $\mathbb{P}(\Omega^*) = 1$, a na množině $((0,\tau]] = \{(t,x,\omega) : t < \tau(\omega),\ \omega \in \Omega^*,\ x \in \mathbb{R}^d\}$ je splněno:*

1. *u je spojité v proměnné x a γ-hölderovsky spojité v proměnné t pro každé $(t,x,\omega) \in ((0,\tau]]$, kde $\gamma > 1-H$,*
2. *všechny potřebné parciální derivace u vzhledem k x existují a jsou spojité v proměnné x a γ-hölderovsky spojité v proměnné t na $[0,T]\ \forall\, 0 < T < \tau$, kde $\gamma > 1-H$,*
3. *rovnost*

$$u(t,x) = u_0(x) + \int_0^t F(u(s,x), Du(s,x), \dots)\,\mathrm{d}s + \int_0^t u(s,x)(f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) + g(s)\,\mathrm{d}s)$$

platí pro všechna $(t,x,\omega) \in ((0,\tau]]$.

V dalším se budeme zabývat pouze jistým typem diferenciální rovnice, tzv. homogenní rovnicí. Konkrétně to popisuje následující definice.

Definice 3.3. *Řekneme, že funkce F je homogenní stupně $m \geq 1$, jestliže $\forall \lambda > 0$ platí*

$$F(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \dots) = \lambda^m F(x, y, z, \dots). \tag{7}$$

Řekneme, že rovnice (5) je homogenní stupně $m \geq 1$, jestliže funkce F je homogenní stupně m.

Definujme funkce

$$h(t) = \exp\Big(\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s)\Big) \quad \text{a} \quad H(t) = \int_0^t h^{m-1}(s)\,\mathrm{d}s. \tag{8}$$

Proces h se nazývá geometrický frakcionální Brownův pohyb a hraje klíčovou roli ve vztahu řešení rovnic (5) a (6). Zřejmě $h(0) = 1$ a přímou aplikací Itôovy formule (3) dostáváme, že proces h splňuje rovnost

$$h(t) = 1 + \int_0^t h(s)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) + \int_0^t h(s)g(s)\,\mathrm{d}s.$$

Platí následující věta.

Věta 3.1. *Předpokládejme, že funkce F v rovnici (5) je spojitá a homogenní stupně m, a nechť funkce $v = v(t,x)$ je klasickým řešením rovnice (5). Definujme funkci u vztahem*

$$u(t,x) = h(t)v(H(t),x). \tag{9}$$

Potom u je klasickým řešením rovnice (6).

Důkaz.
Nechť v je klasickým řešením (5) a nechť máme dán markovský čas τ. Dále pro $t < \tau(\omega)$ definujme funkce

$$\begin{aligned} \tilde{h}(t) &:= h(t) - h(0), \\ \tilde{v}(t,x) &:= v(t,x) - v_0(x) \end{aligned}$$

a funkci $H^* : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d,\ (t,x) \mapsto (H(t),x)$. Vidíme, že platí

$$\tilde{h}(t) = \int_0^t h(s)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) + \int_0^t h(s)g(s)\,\mathrm{d}s$$

a protože v řeší (5), platí také

$$v(t,x) = v_0(x) + \int_0^t F(v, Dv, D^2v, \dots)(s,x)\,\mathrm{d}s$$

a

$$v(H(t),x) = v_0(x) + \int_0^{H(t)} F(v, Dv, D^2v, \dots)(s,x)\,\mathrm{d}s$$

a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(H(t),x) = H'(t)F(v \circ H^*, D(v \circ H^*), D^2(v \circ H^*), \dots)(t,x),$$

neboli

$$\tilde{v}(H(t),x) = v(H(t),x) - v_0(x) = \int_0^t H'(s)F(v \circ H^*, D(v \circ H^*), D^2(v \circ H^*), \dots)(s,x)\,\mathrm{d}s.$$

Nyní můžeme psát

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= h(t)v(H(t),x) = (\tilde{h}(t)+h(0))(\tilde{v}(H(t,x))+v_0(x)) \\
&= h(0)v(0,t) + \tilde{h}(t)\tilde{v}(H(t),x) + \tilde{h}(t)v_0(x) + \tilde{v}(H(t),x)h(0)
\end{aligned} \tag{10}
$$

a chtěli bychom aplikovat Itôovou formuli (4) na součin $\tilde{h}(t)\tilde{v}(H(t),x)$. Vidíme, že jsme v situaci Důsledku 2.1, kdy roli $Y^m(t)$ hraje $\tilde{v}(H(t),x)$ a $Y(t)$ je $\tilde{h}(t)$. Ověřme tedy předpoklady Důsledku 2.1.

- Předpoklad
$$\int_0^t |H'(s)F(v\circ H^*, D(v\circ H^*), D^2(v\circ H^*),\ldots)(s,x)|\,\mathrm{d}s < \infty \quad s.j.$$
platí, neboť:
$$X(t) = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s)$$
je s.j. $(1-\alpha)$-hölderovská podle Lemmatu 2.1, tudíž $\mathrm{e}^{X(t)}$ je $(1-\alpha)$-hölderovská, protože exponenciála má lokálně omezenou derivaci, a nakonec $h(t) = \mathrm{e}^{X(t)+\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s}$ je s.j. $(1-\alpha)$-hölderovská, protože $\mathrm{e}^{\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s}$ má taktéž lokálně omezenou derivaci. Z toho plyne, že $H'(t) = h^{m-1}(t)$ je s.j. spojitá a tedy omezená na $[0,t]$, a tedy $H'(s)F(v\circ H^*, D(v\circ H^*), D^2(v\circ H^*),\ldots)(s,x)$ je integrovatelná, protože $F(v\circ H^*, D(v\circ H^*), D^2(v\circ H^*),\ldots)(s,x)$ je integrovatelná, neboť H^* je spojitá a v řeší (5).

- Předpoklad
$$\int_0^t |\tilde{v}(H(t),x)h(s)g(s)|\,\mathrm{d}s < \infty \quad s.j.$$
platí, protože všechny tři funkce v integrandu jsou s.j. omezené.

- Předpoklad
$$\int_0^t |\tilde{h}(s)H'(s)F(v\circ H^*, D(v\circ H^*), D^2(v\circ H^*),\ldots)(s,x)|\,\mathrm{d}s < \infty \quad s.j.$$
platí, protože $\tilde{h}(t)$ je omezená a $H'(t)F(v\circ H^*, D(v\circ H^*), D^2(v\circ H^*),\ldots)(t,x)$ integrovatelná s.j.

- Předpoklad
$$\tilde{v}(H(t),x)h(t)f(t) \in C^\gamma([0,t]),\ \gamma + H > 1, \quad s.j.$$
platí, protože $h \in C^{1-\alpha}([0,t])$, $f \in C^{\alpha+\varepsilon}([0,t])$, $\tilde{v}(H(s),x)$ má omezenou derivaci s.j. a $\alpha + H > 1$.

Teď můžeme na $\tilde{h}(t)\tilde{v}(H(t),x)$ použít Itôovu formuli (4) z Důsledku 2.1. Dostáváme

$$
\begin{aligned}
\tilde{h}(t)\tilde{v}(H(t),x) &= \int_0^t \tilde{h}(s)H'(s)F(v\circ H^*, D(v\circ H^*), D^2(v\circ H^*),\ldots)(s,x)\,\mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t \tilde{v}(H(s),x)h(s)g(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \tilde{v}(H(s),x)h(s)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) \\
&= \int_0^t h^m(s)F(v\circ H^*, D(v\circ H^*), D^2(v\circ H^*),\ldots)(s,x)\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \quad h(0)\int_0^t H'(s)F(v\circ H^*, D(v\circ H^*), D^2(v\circ H^*),\dots)(s,x)\,\mathrm{d}s\\
&+ \quad \int_0^t v(H(s),x)h(s)g(s)\,\mathrm{d}s - v_0(x)\int_0^t h(s)g(s)\,\mathrm{d}s\\
&+ \quad \int_0^t v(H(s),x)h(s)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) - v_0(x)\int_0^t h(s)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s)\\
&= \quad \int_0^t F(u,Du,D^2u,\dots)(s,x)\,\mathrm{d}s - h(0)\tilde{v}(H(t),x)\\
&+ \quad \int_0^t u(s,x)g(s)\,\mathrm{d}s - v_0(x)\tilde{h}(s) + \int_0^t u(s,x)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s),
\end{aligned}
$$

přičemž v první rovnosti se použil Důsledek 2.1, ve druhé se použila definice $\tilde{h}$ a $\tilde{v}$ a rovnost $H'(s) = h^{m-1}(s)$ a ve třetí rovnosti homogenita F, definice u, $\tilde{h}$ a $\tilde{v}$.

Dosadíme-li právě spočtený výraz do rovnosti (10), dostáváme

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= h(0)v(0,t) + \int_0^t F(u,Du,D^2u,\dots)(s,x)\,\mathrm{d}s - h(0)\tilde{v}(H(t),x)\\
&+ \int_0^t u(s,x)g(s)\,\mathrm{d}s - v_0(x)\tilde{h}(s) + \int_0^t u(s,x)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) + \tilde{h}(t)v_0(x)\\
&+ \tilde{v}(H(t),x)h(0)\\
&= u_0(x) + \int_0^t F(u,Du,D^2u,\dots)(s,x)\,\mathrm{d}s\\
&+ \int_0^t u(s,x)g(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t u(s,x)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s).
\end{aligned}
$$

Tímto jsme ověřili bod 3 z Definice 3.2. Body 1 a 2 platí díky Hölderovské spojitosti h a H. Celkově dostáváme, že u je klasickým řešením rovnice (6).

□

Tvrzení předchozí věty lze obrátit minimálně v případě bilineární rovnice.

Věta 3.2. *Předpokládejme, že funkce F v rovnici (5) je spojitá a homogenní stupně 1, a nechť u je klasické řešení její stochastické verze (6). Potom funkce v definovaná vztahem*

$$v(t,x) = z(t)u(t,x)$$

je klasickým řešením rovnice (5), kde $z(t) = 1/h(t)$.

Důkaz.
Tvrzení se ukáže analogicky jako v předchozí větě. Nechť u je klasickým řešením (6), tj. platí

$$u(t,x) = u_0(x) + \int_0^t \Big[F(u(s,x), Du(s,x),\dots) + u(s,x)g(s)\Big]\,\mathrm{d}s + \int_0^t u(s,x)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s).$$

Pomocí Itôovy formule (3) aplikované na proces $z(t) = p(t, X(t))$, kde

$$p(t,x) = \mathrm{e}^{-x-\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s}$$

a stejně jako ve Větě 3.1

$$X(t) = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s),$$

dostáváme

$$z(t) = 1 - \int_0^t z(s)g(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^t z(s)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s).$$

Nyní definujme funkce $\tilde{z}(t) = z(t) - z(0)$ a $\tilde{u}(t,x) = u(t,x) - u_0(x)$ a pišme

$$\begin{aligned} v(t,x) &= z(t)u(t,x) = (\tilde{z}(t) + z(0))(\tilde{u}(t,x) + u_0(x)) \\ &= \tilde{z}(t)\tilde{u}(t,x) + z(0)\tilde{u}(t,x) + \tilde{z}(t)u_0(x) + u_0(x)z(0) \end{aligned} \tag{11}$$

a $\tilde{z}(t)\tilde{u}(t,x) = z_1(t)\tilde{u}(t,x) + z_2(t)\tilde{u}(t,x)$, kde

$$z_1(t) = -\int_0^t z(s)g(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{a} \quad z_2(t) = -\int_0^t z(s)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s).$$

Na součin $z_1(t)\tilde{u}(t,x)$ aplikujeme Itôovu formuli (4) z Důsledku 2.1, přičemž roli Y má $\tilde{u}$ a Y^m je z_1, a dostaneme

$$\begin{aligned} z_1(t)\tilde{u}(t,x) &= \int_0^t z_1(t)\Big[F(u(s,x), Du(s,x), \dots) + u(s,x)g(s)\Big]\,\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t z_1(s)u(s)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) - \int_0^t \tilde{u}(t,x)z(s)g(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Na součin $z_2(t)\tilde{u}(t,x)$ aplikujeme Itôovu formuli (3) z Věty 2.1 následujícím způsobem: $z_2(t)\tilde{u}(t,x) = p(Y^2(t), Y^3(t), Y^m(t))$, kde

$$p(y_2,y_3,y_m) = -y_2(y_3+y_m), \quad \frac{\partial p}{\partial y_2}(y_2,y_3,y_m) = -(y_3+y_m), \quad \frac{\partial p}{\partial y_3}(y_2,y_3,y_m) = -y_2,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y_m}(y_2,y_3,y_m) = -y_2, \quad Y^2(t) = -z_2(t), \quad Y^3(t) = \int_0^t u(s,x)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s)$$

a

$$Y^m(t) = \int_0^t \Big[F(u(s,x), Du(s,x), \dots) + u(s,x)g(s)\Big]\,\mathrm{d}s.$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} z_2(t)\tilde{u}(t,x) &= -\int_0^t (Y^3(s) + Y^m(s))z(s)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) - \int_0^t Y^2(s)u(s)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) \\ &- \int_0^t Y^2(s)\Big[F(u(s,x), Du(s,x), \dots) + u(s,x)g(s)\Big]\,\mathrm{d}s \\ &= -\int_0^t \tilde{u}(s,x)z(s)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) + \int_0^t z_2(s)u(s,x)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) \\ &+ \int_0^t z_2(s)\Big[F(u(s,x), Du(s,x), \dots) + u(s,x)g(s)\Big]\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned} \tilde{z}(t)\tilde{u}(t,x) &= z_1(t)\tilde{u}(t,x) + z_2(t)\tilde{u}(t,x) \\ &= \int_0^t \tilde{z}(s)u(s,x)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) - \int_0^t \tilde{u}(s,x)z(s)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) \\ &+ \int_0^t \tilde{z}(s)\Big[F(u(s,x), Du(s,x), \dots) + u(s,x)g(s)\Big]\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \int_0^t \tilde{u}(s)z(s)g(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \Big\{(z(s)-z(0))u(s)f(s) - (u(s,x)-u_0(x))z(s)f(s)\Big\}\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) \\
&+ \int_0^t \Big\{(z(s)-z(0))\Big[F(u(s,x),Du(s,x),\ldots)+u(s,x)g(s)\Big] \\
&\qquad\qquad -(u(s,x)-u_0(x))z(s)g(s)\Big\}\,\mathrm{d}s \\
&= -z(0)\int_0^t u(s,x)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) + u_0(x)\int_0^t f(s)z(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) \\
&+ \int_0^t z(s)F(u(s,x),Du(s,x),\ldots)\,\mathrm{d}s + u_0(x)\int_0^t z(s)g(s)\,\mathrm{d}s \\
&- z(0)\Big\{\int_0^t F(u(s,x),Du(s,x),\ldots)\,\mathrm{d}s + \int_0^t u(s,x)g(s)\,\mathrm{d}s\Big\} \\
&= \int_0^t F(v(s,x),Dv(s,x),\ldots)\,\mathrm{d}s - u_0(x)\tilde{z}(t) - z(0)\tilde{u}(t,x)
\end{aligned}
$$

a dosadíme-li právě spočtený výraz do (11), dostáváme konečně

$$
\begin{aligned}
v(t,x) &= \int_0^t F(v(s,x),Dv(s,x),\ldots)\,\mathrm{d}s - u_0(x)\tilde{z}(t) - z(0)\tilde{u}(t,x) \\
&+ z(0)\tilde{u}(t,x) + \tilde{z}(t)u_0(x) + u_0(x)z(0) \\
&= \int_0^t F(v(s,x),Dv(s,x),\ldots)\,\mathrm{d}s + v_0(x),
\end{aligned}
$$

tedy v splňuje rovnost (5) a bod 3 z Definice 3.1 Předpoklady pro použití Itôovy formule podle Věty 2.1 a Důsledku 2.1 se ověří zcela analogicky jako v důkaze Věty 3.1. Platnost bodů 1 a 2 Definice 3.1 plyne přímo z bodů 1 a 2 Definice 3.2 a spojitosti z.

□

4 Stochastická rovnice porézního prostředí

Zvláštní zájem budeme věnovat následující rovnici

$$v_t(t,x) = \Delta v^m(t,x),\ t>0, \tag{12}$$

kde $v_t = \partial v/\partial t$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ a Δ je Laplaceův operátor.

Stejně jako v předchozí sekci uvažujme stochastickou verzi rovnice (12):

$$\mathrm{d}u(t,x) = \Delta u^m(t,x)\,\mathrm{d}t + u(t,x)(f(t)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(t) + g(t)\,\mathrm{d}t),\ t>0,\ x\in\mathbb{R}^d. \tag{13}$$

Budeme zkoumat vztah mezi řešeními těchto dvou rovnic, ovšem nyní již nebudou uvažovaná řešení nutně klasická. Řešení deterministické rovnice definujeme následujícím způsobem:

Definice 4.1. *Nezáporná funkce $v = v(t,x)$ se nazývá řešení rovnice (12), jestliže pro každou hladkou funkci $\varphi = \varphi(x)$ s kompaktním nosičem platí pro všechny $t > 0$ rovnost*

$$(v,\varphi)(t) = (v_0,\varphi) + \int_0^t (v^m,\Delta\varphi)(s)\,\mathrm{d}s,$$

kde

$$(v,\varphi)(t) = \int_{\mathbb{R}^d} v(t,x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

a funkce $t \mapsto (v^m,\varphi)(t)$ *je* γ*-Hölderovsky spojitá na* $[0,T]$ $\forall T > 0$, *kde* $\gamma > 1 - H$.

Analogicky řešení stochastické rovnice:

Definice 4.2. *Nechť* τ *je markovský čas. Nezáporné náhodné pole* $u = u(t,x)$ *se nazývá řešení rovnice (13), jestliže existuje množina* $\Omega^* \subset \Omega$, $\mathbb{P}(\Omega^*) = 1$, *a na množině* $((0,\tau]] = \{(t,\omega) : t < \tau(\omega),\ \omega \in \Omega^*\}$ *platí pro každou hladkou funkci* $\varphi = \varphi(x)$ *s kompaktním nosičem pro všechny* $(t,\omega) \in ((0,\tau]]$ *rovnost*

$$(u,\varphi)(t) = (u_0,\varphi) + \int_0^t (u^m,\Delta\varphi)(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t (u,\varphi)(s)(f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) + g(s)\,\mathrm{d}s), \tag{14}$$

kde

$$(u,\varphi)(t) = \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Mezi řešeními rovnic (12) a (13) platí stejný vztah jako pro klasická řešení.

Věta 4.1. *Nechť* v *je řešením rovnice (12). Pak náhodné pole* u *dané vztahem*

$$u(t,x) = v(H(t),x)h(t), \tag{15}$$

kde h *a* H *jsou dány v (8), je řešením rovnice (13).*

Důkaz.
Důkaz probíhá stejně jako důkaz Věty 3.1. Nechť v je řešením (12) a nechť τ je markovský čas, $t < \tau(\omega)$ a $\varphi = \varphi(x)$ je hladká funkce s kompaktním nosičem. Definujme funkce

$$\begin{aligned} \tilde{h}(t) &:= h(t) - h(0), \\ \tilde{v}(t,x) &:= v(t,x) - v_0(x) \end{aligned}$$

a funkci $H^* : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d,\ (t,x) \mapsto (H(t),x)$. Vidíme, že platí

$$\tilde{h}(t) = \int_0^t h(s)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) + \int_0^t h(s)g(s)\,\mathrm{d}s$$

a protože v řeší (12), platí také

$$(\tilde{v} \circ H^*,\varphi)(t) = \int_0^{H(t)} (v^m,\Delta\varphi)(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t h^{m-1}(s)(v^m,\Delta\varphi)(s)\,\mathrm{d}s.$$

Můžeme psát

$$(u,\varphi)(t) = h(t)(v \circ H^*)(t) = h(0)(v_0,\varphi) + \tilde{h}(t)(\tilde{v},\varphi)(t) + \tilde{h}(t)(v_0,\varphi) + h(0)(\tilde{v},\varphi)(t)$$

a na součin $\tilde{h}(t)(\tilde{v},\varphi)(t)$ použít Itôovu formuli (4) z Důsledku 2.1 a dostaneme

$$\tilde{h}(t)(\tilde{v},\varphi)(t) \quad = \quad \int_0^t \tilde{h}(s)h^{m-1}(s)(v^m \circ H^*,\Delta\varphi)(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t (\tilde{v},\varphi)(s)h(s)g(s)\,\mathrm{d}s$$

$$
\begin{aligned}
&+ \int_0^t (\tilde v,\varphi)(s)h(s)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s)\\
&= \int_0^t h^m(s)(v^m\circ H^*,\Delta\varphi)(s)\,\mathrm{d}s - h(s)(\tilde v,\varphi)(t) + \int_0^t (v,\varphi)(s)h(s)g(s)\,\mathrm{d}s\\
&- (v_0,\varphi)\int_0^t h(s)g(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t (v,\varphi)(s)h(s)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s)\\
&- (v_0,\varphi)\int_0^t h(s)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s)\\
&= \int_0^t (u^m,\Delta\varphi)(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t (u,\varphi)(s)g(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t (u,\varphi)(s)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s)\\
&- h(0)(\tilde v(t),\varphi) - (v_0,\varphi)\tilde h(t).
\end{aligned}
$$

Dosadíme-li za $\tilde h(t)(\tilde v,\varphi)(t)$ zpátky, dostáváme

$$(u,\varphi)(t) = (u_0,\varphi) + \int_0^t (u^m,\Delta\varphi)(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t (u,\varphi)(s)g(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t (u,\varphi)(s)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s).$$

Ověření předpokladů Důsledku 2.1 proběhne stejně jako v důkazu Věty 3.1 s tím, že roli $\tilde v(H(t),x)$ hraje $(\tilde v\circ H^*,\varphi)(t)$.

□

5 Příklady

5.1 Barenblattovo řešení

V této sekci budeme studovat některé vlastnosti řešení rovnice (13). Barenblattovým řešením rovnice $U_t = \Delta(U^m)$ je funkce

$$U^{[BT]}(t,x;b) = \frac{1}{t^\alpha}\Big(\max\Big(0,\ b - \frac{m-1}{2m}\beta\frac{|x|^2}{t^{2\beta}}\Big)\Big)^{1/(m-1)},\ t>0,\ x\in\mathbb{R}^d, \tag{16}$$

kde $b>0$ a

$$\beta = \frac{1}{(m-1)d+2},\quad \alpha = \beta d.$$

Je to důležité řešení, které má mnohé zajímavé vlastnosti, jejichž podrobnější popis lze nalézt např. v [1], [3], [7] nebo [4]. My zde budeme potřebovat především následující vlastnosti, první je z [1], druhá z [3]:

- Celková hmota řešení M, definovaná jako $M = \int_{R^d} U^{[BT]}(t,x;b)\,\mathrm{d}x$, nezávisí na t a je jednoznačně určena hodnotou parametru b, platí

  $$M := M_b = b^{1/(2\beta(m-1))}\Big(\frac{m-1}{2\pi m}\beta\Big)^{-d/2}\frac{\Gamma(\frac{m}{m-1})}{\Gamma(\frac{m}{m-1}+d)},$$

  kde Γ je gamma funkce.

- Nechť $U^{[BT]}(t,x;b)$ je Barenblattovo řešení s hmotou M_b a $U(t,x)$ je libovolné řešení rovnice (12) ve smyslu Definice 4.1 s $\int_{\mathbb{R}^d} U(0,x) = M_b$. Potom

  $$t^{\beta d}|U(t,x) - U^{[BT]}(t,x;b)| \to 0,\ t\to\infty,$$

stejnoměrně vzhledem k x na množinách tvaru

$$\{(t,x) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ : |x| \le Ct^\beta\},$$

kde $C > 0$.

Řešení $U^{[BT]}$ splňuje předpoklady Věty 4.1, a proto náhodné pole $u^{[BT]} = u^{[BT]}(t,x;b) = h(t)U^{[BT]}(H(t),x;b)$ je řešením rovnice (13). Má následující vlastnosti:

- Střední hodnota hmoty řešení $u^{[BT]}$ je

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_{\mathbb{R}^d} u^{[BT]}(t,x;b)\,\mathrm{d}x &= \mathbb{E}h(t)\int_{\mathbb{R}^d} U^{[BT]}(H(t),x;b)\,\mathrm{d}x = M_b\,\mathbb{E}h(t) \\
&= M_b\,\mathbb{E}\exp\Big(\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) + \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\Big) \\
&= M_b \mathrm{e}^{\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathbb{E}\exp\Big(\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s)\Big) \\
&= M_b \exp\Big\{\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s \\
&\qquad + \frac{1}{2}H(2H-1)\int_0^t\int_0^t f(u)f(v)|u-v|^{2H-2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\Big\},
\end{aligned}$$

  protože, podle knihy [2], Theorem 5.5.1 a Lemma 3.1.3, je $\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s)$ centrovaná gaussovská náhodná veličina s rozptylem

$$H(2H-1)\int_0^t\int_0^t f(u)f(v)|u-v|^{2H-2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

  a tudíž

$$\mathbb{E}\exp\Big(\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s)\Big) = \exp\Big\{\frac{1}{2}H(2H-1)\int_0^t\int_0^t f(u)f(v)|u-v|^{2H-2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\Big\}.$$

- Asymptotické chování některých řešení popisuje následující tvrzení.

  Tvrzení 5.1. *Nechť $\lim_{t\to\infty} H(t) = \infty$ s pravděpodobností 1. Nechť $U(t,x)$ je takovým řešením rovnice (12), že platí*

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)\,\mathrm{d}x = M_b$$

  a $u(t,x)$ je jemu odpovídající řešení rovnice (13), tj. $u(t,x) = h(t)U(H(t),x)$, potom

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d \ \lim_{t\to\infty} \frac{(H(t))^{\beta d}}{h(t)}|u(t,x) - u^{[BT]}(t,x;b)| = 0 \ \text{s.j.}$$

  Důkaz.
  Platí

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} \frac{(H(t))^{\beta d}}{h(t)}|u(t,x) - u^{[BT]}(t,x;b)| \\
&\quad= \lim_{t\to\infty} \frac{(H(t))^{\beta d}}{h(t)} h(t)|U(H(t),x) - U^{[BT]}(H(t),x;b)| \\
&\quad= \lim_{t\to\infty} (H(t))^{\beta d}|U(H(t),x) - U^{[BT]}(H(t),x;b)| \\
&\quad\overset{s.j.}{=} \lim_{t\to\infty} t^{\beta d}|U(t,x) - U^{[BT]}(t,x;b)| = 0,
\end{aligned}$$

  přičemž poslední rovnost plyne z vlastností řešení deterministické rovnice.

Reference

[1] Aronson D. G.: The Porous Medium Equation. In *Nonlinear Diffusion Problems (Montecatini Terme, 1985)*, Lecture Notes in Math. 1224 1–46, Springer, Berlin, 1986.

[2] Biagini F., Yaozhong H., Øksendal B., Zhang T.: *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*, Springer, London, 2008.

[3] Friedman A., Kamin S.: *The Asymptotic Behavior of Gas in n-dimensional Porous Medium*, Trans. Amer. Math. Soc., 262(2), 551-563, 1980.

[4] Lototsky S. V.: *A random change of variables and applications to the stochastic porous medium equation with multiplicative time noise*, Communications on Stochastic Analysis 1(3) 343–355, 2007.

[5] Maslowski B., Nualart D.: *Evolution equations driven by a fractional Brownian motion*, Journal of Functional Analysis 202 277–305, 2003.

[6] Mishura Y. S.: *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes*, Springer, Berlin, 2008.

[7] Vázques J. L.: *The Porous Medium Equation (Mathematical Theory)*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford, 2007.