Mechanické systémy s diferenciálními vazbami a problém regularity *

Petra Šenkeřiková
Přírodovědecká fakulta, Univerzita Palackého, Olomouc

Abstrakt. Práce se zabývá problémem regularity pro Lagrangeovy rovnice podrobené vazbám tvaru systému obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. Pohybové rovnice takovýchto systémů se vyskytují v řadě zejména technických aplikací a aplikací ve fyzi-ce (tzv. neholonomní klasická mechanika). Donedávna neexistovala matematická teorie popisující neholonomní mechanické systémy a jejich vlastnosti. Zejména bylo známo, že variační systém, který je regulární (tj. Cauchyho úloha pro jeho pohybové rovnice má jednoznačně určené řešení), se v případě vazby může stát neregulárním (existence a jednoznačnost řešení pro dané počáteční podmínky není garantovaná). V této práci studujeme regularitu variačních systémů klasické mechaniky podrobených neholonomním vazbám, které jsou afinní a kvadratické v rychlostech. Využíváme k tomu výsledky nedávno publikované geometrické teorie neholonomně vázaných systémů, kde je vázaný systém modelován pomocí diferenciálních rovnic druhého řádu na podvarietě prvního jetového prodloužení fibrované variety. Dokazujeme, že libovolná vazba, která je afinní funkcí rychlostí, vede k regulárním pohybovným rovnicím na vazebné podvarietě. Výsledkem práce je také zjištění, že u vazeb kvadratických v rychlostech již podobné tvrzení neplatí; provádíme klasifikaci těchto vazeb z hlediska regularity vázaného systému.

1 Úvod

V této práci se zabýváme Lagrangeovými systémy, jejichž pohyb je podroben *neholonomním vazbám*, tj. omezením na polohy a rychlosti, které se mohou v čase měnit. Tyto mechanické systémy vykazují řadu podivných vlastností a zejména v posledních asi 15 letech jsou intenzívně studovány. V současné době již existuje matematická teorie, která umožnuje tyto systémy popsat a jejich chování pochopit a předvídat (viz např. [1, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15]). Matematický popis je založen na geometrickém chápání Lagrangeových systémů a neholonomních vazeb jako objektů a podvariet v prostorech jetů

*Soutěžní práce 10. ročníku SVOČ v matematice a informatice, Košice, květen 2009
Vedoucí práce: Prof. RNDr. Olga Krupková, DrSc., Přírodovědecká fakulta, Univerzita Palackého, Olomouc

fibrovaných variet. Původní heuristické Chetaevovy pohybové rovnice [2] jsou nahrazeny tzv. redukovanými rovnicemi [6, 12], které popisují dynamiku přímo na vázané varietě. Tento přístup také umožňuje studovat neholonmní systémy efektivními geometrickými metodami.

Zde se zabýváme problémem regularity neholonomně vázaných systémů. Regulární jsou takové pohybové rovnice, které lze lokálně reprezentovat jediným hladkým vektorovým polem druhého řádu (semisprayem) [7]. Z hlediska dynamiky to znamená, že Cauchyho počáteční úloha má právě jedno maximální řešení. Regularita neholonomních systémů je zatím jen málo prozkoumaná, je například známo, že regulární Lagrangeův systém se někdy vazbou může stát neregulárním a naopak. Naším cílem je prozkoumat regularitu v případech, který se v aplikacích vyskytuje nejčastěji, a to pro "klasické" mechanické systémy v trojrozměrném konfiguračním prostoru, kdy Lagrangián má tvar rozdílu kinetické a potenciální energie a vazby jsou lineární (afinní) nebo kvadratické v rychlostech. Dokazujeme, že libovolná vazba, která je afinní funkcí rychlostí, vede k regulárním pohybovným rovnicím na vazebné podvarietě. Výsledkem práce je také zjištění, že u vazeb kvadratických v rychlostech již podobné tvrzení neplatí; provádíme klasifikaci těchto vazeb z hlediska regularity vázaného systému.

2 Základní struktury

Definice a označení v této kapitole jsou standardní (viz např.[7],[14]). Budeme pracovat s fibrovanou varietou $\pi : Y \to X$, jejíž báze X je 1-rozměrná a dimenze fibru je m (tzn. $\dim Y = m+1$). První a druhé jetové prodloužení fibrované variety π jsou $\pi_1 : J^1Y \to X$, $\pi_2 : J^2Y \to X$. Kanonické projekce označujeme $\pi_{r,s} : J^rY \to J^sY$, $r > s = 0,1,2$. Připomínáme, že varieta J^1Y je definovaná jako

$$J^1Y = \bigcup_{x\in X} J^1_x\gamma,$$

kde $J^1_x\gamma$ probíhá všechny 1-jety všech řezů variety X jdoucí bodem x.

Souřadnice na X budeme označovat (t), na Y (t, q^σ), $1 \leq \sigma \leq m$, a na J^1Y $(t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma)$, $1 \leq \sigma \leq m$. Budeme používat standardní sumační konvenci (sčítání přes dvojici stejných indexů v poloze dolní a horní).

Důležitou strukturou na varietě J^1Y jsou kontaktní formy. Diferenciální forma η na J^1Y se nazývá *kontaktní*, jestliže $J^1\gamma^*\eta = 0$ pro každý řez γ variety $\pi : Y \to X$. Ideál kontaktních forem ve vnější algebře je lokálně generován lineárními formami $\omega^\sigma = dq^\sigma - \dot{q}^\sigma\,dt$. Budeme používat i kontaktní strukturu na J^2Y generovanou ω^σ a $\dot{\omega}^\sigma = d\dot{q}^\sigma - \ddot{q}^\sigma\,dt$.

Distribuce na J^1Y je definována jako zobrazení, které každému bodu $z \in J^1Y$ přiřadí tečný vektor z vektorového prostoru T_zJ^1Y.

Lagrangeovou funkci označme L, Lagrangián je diferenciální forma $\lambda = Ldt$. Každý Lagrangián má jednoznačně určený Lepageův ekvivalent [5], který se označuje θ_λ a nazývá se *Cartanova forma.* Platí

$$\theta_\lambda = Ldt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma}\omega^\sigma.$$

Je známo, že extremály Lagrangiánu λ jsou řezy γ fibrované variety π splňující podmínku

$$J^1\gamma^* i_\xi d\theta_\lambda = 0$$

pro každé vertikální vektorové pole ξ na J^1Y [5]. Uvedené rovnice se nazývají *Eulerovy-Lagrangeovy rovnice.* Ve fibrovaných souřadnicích mají tvar

$$\frac{\partial L}{\partial q^\sigma} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma} = 0, \qquad 1 \leq \sigma \leq m,$$

a jsou to obyčejné diferencilní rovnice 2. řádu pro řezy γ.

Neholonomní vazbou rozumíne dvojici (Q, C), kde Q představuje podvarietu $\pi_{1,0}|_Q : Q \to Y$ fibrované variety $\pi_{1,0} : J^1Y \to Y$ a C je distribuce na Q, nazývaná *kanonická distribuce*, její generátory uvádíme níže. Dále označme $\iota : Q \to J^1Y$ kanonické vložení. Podvarietu Q lze popsat rovnicemi $f^i = 0$, $1 \leq i \leq k$, kde hodnost matice $rank\left(\frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^\sigma}\right) = k \leq m-1$ udává kodimenzi podvariety Q. Rovnice vazby Q lze vyjádřit ekvivalentně v tzv. normálním tvaru[1]

$$\dot{q}^{m-k+a} = g^a\left(t, q^\sigma, \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^{m-k}\right), \qquad 1 \leq a \leq k.$$

Kanonická distribuce C [6] je pak anihilována diferenciálními 1-formami tvaru

$$\varphi^a = \omega^{m-k+a} - \frac{\partial g^a}{\partial \dot{q}^l}\omega^l, \qquad 1 \leq a \leq k.$$

Ideál generovaný těmito formami se nazývá *vazebný ideál* a označuje se $I(C^0)$.

Nechť λ je Lagrangián na J^1Y a $Q \subset J^1Y$ je neholonomní vazba. *Vázaným Lagrangeovým systémem* [8] rozumíme třídu ekvivalence $[\iota^* d\theta_\lambda]$, kde relace ekvivalence je definována takto:

$$\alpha_1 \sim \alpha_2 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 + \varphi, \quad \varphi \in I(C^0).$$

Vázané extremály jsou řešení rovnic $J^1\gamma^* i_\zeta \alpha = 0$, kde ζ probíhá generátory kanonické distribuce a α je libovolný reprezentant třídy ekvivalence $[\iota^* d\theta_\lambda]$ [6] (v souřadicích viz též [12]). Tyto rovnice se nazývají *redukované pohybové rovnice.* Jak bylo ukázáno, struktura řešení redukovaných rovnic je dána charakteristickou distribucí 2-formy α [6]. Řekneme, že vázaný Lagrangeův systém $[\iota^* d\theta_\lambda]$ je *regulární*, jestliže charakteristická distribuce 2-formy $\iota^* d\theta_\lambda$ má hodnost 1 (tj. je lokálně generována jediným vektorovým polem) [6]. Podmínka regularity má ve fibrovaných souřadnicích tvar [6, 8, 1]

$$\det\left(\frac{\partial^2(L\circ\iota)}{\partial \dot{q}^l \partial \dot{q}^s} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{m-k+a}}\circ\iota\right)\frac{\partial^2 g^a}{\partial \dot{q}^l \partial \dot{q}^s}\right) \neq 0. \tag{1}$$

V tom případě každým bodem prostoru Q prochází právě jeden maximální řez.

[1]Neholonomní vazby jsou popsány systémy obyčejných diferenciálních rovnic 1.řádu, závisí tedy na souřadnicích času, prostoru i rychlostech. Vazby, které jsou na rychlostech nezávislé, se nazývají holonomní (tvoří podvarietu v Y).

3 Regularita klasických neholonomně vázaných Lagrangeových systémů

Budeme uvažovat klasické mechanické systémy v třírozměrném konfiguračním prostoru, tj. dimenze báze fibrované variety je jedna, dimenze fibru je tři, Lagrangeova funkce je ve tvaru rozdílu kinetické a potenciální energie: $L = T - V$. Označme t souřadnici na bázi X a (t, q^1, q^2, q^3) souřadnice v totálním prostoru Y, potom souřadnice v prvním jetovém prodloužení J^1Y uvažované fibrované variety jsou $(t, q^1, q^2, q^3, \dot{q}^1, \dot{q}^2, \dot{q}^3)$.

Jak jsme viděli výše, podmínka regularity závisí na Lagrangeově funkci, ale také na vazbách systému. V následujícím textu budeme hledat vazby, pro které jsou klasické mechanické systémy na vazbě regulární. Vyšetříme vazby afinní v rychlostech a vazby ve tvaru polynomu druhého stupně v rychlostech. Uvažované mechanické systémy jsou určeny Lagrangiánem

$$L = T - V = \frac{1}{2}mv^2 - V(t, q^\sigma) = \frac{1}{2}m[(\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2 + (\dot{q}^3)^2] - V(t, q^1, q^2, q^3). \tag{2}$$

Věta 1
Nechť $\lambda = Ldt$ je Lagrangián (2) a vazba Q je dána jednou rovnicí afinní v rychlostech

$$Q : \dot{q}^3 = g(t, q^1, q^2, q^3, \dot{q}^1, \dot{q}^2) = A\dot{q}^1 + B\dot{q}^2 + C,$$

kde A, B, C jsou konstanty nebo funkce souřadnic (t, q^1, q^2, q^3). Pak každý vázaný systém $[\iota^* d\theta_\lambda]$ je regulární.

Důkaz 1
Ověřujeme regularitu pro vazbu

$$Q : \dot{q}^3 = g(t, q^1, q^2, q^3, \dot{q}^1, \dot{q}^2) = A\dot{q}^1 + B\dot{q}^2 + C,$$

kde A, B, C jsou konstanty nebo funkce souřadnic (t, q^1, q^2, q^3). V tom případě platí:

$$\begin{aligned}
L \circ \iota &= \frac{1}{2}m[(\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2 + (A\dot{q}^1 + B\dot{q}^2 + C)^2] - V(t, q^1, q^2, q^3) \\
&= \frac{1}{2}m[(1 + A^2)(\dot{q}^1)^2 + (1 + B^2)(\dot{q}^2)^2 + 2AB\dot{q}^1\dot{q}^2 + 2AC\dot{q}^1 + 2BC\dot{q}^2 + C^2] \\
&- V(t, q^1, q^2, q^3), \\
\frac{\partial^2(L \circ \iota)}{(\partial\dot{q}^1)^2} &= \frac{1}{2}m\frac{\partial}{\partial\dot{q}^1}\big(2(1 + A^2)\dot{q}^1 + 2AB\dot{q}^2 + 2AC\big) = m(1 + A^2), \\
\frac{\partial^2(L \circ \iota)}{(\partial\dot{q}^2)^2} &= \frac{1}{2}m\frac{\partial}{\partial\dot{q}^2}\big(2(1 + B^2)\dot{q}^2 + 2AB\dot{q}^1 + 2BC\big) = m(1 + B^2), \\
\frac{\partial^2(L \circ \iota)}{\partial\dot{q}^1\partial\dot{q}^2} &= \frac{1}{2}m\,2AB = mAB.
\end{aligned}$$

Zbývající část výrazu v determinantu (1) bude nulová, protože v ní vystupují druhé parciální derivace podle rychlostí zobrazení g, které je však v rychlostech afinní. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned}
\det\left(\frac{\partial^2(L\circ\iota)}{\partial\dot{q}^l\partial\dot{q}^s}\right) &= m^2\det\begin{pmatrix} 1+A^2 & AB \\ AB & 1+B^2 \end{pmatrix} = m^2[(1+A^2)(1+B^2)-(AB)^2] \\
&= m^2(1+A^2+B^2) > 0.
\end{aligned}$$

Vidíme, že determinant je nenulový vždy, proto libovolná vazba určená jednou rovnicí afinní v rychlostech je regulární.

Věta 2

Nechť $\lambda = Ldt$ je Lagrangián (2) a vazba Q je daná dvěma rovnicemi afinními v rychlostech

$$\begin{aligned}
Q:\dot{q}^2 &= g^1(t,q^1,q^2,q^3,\dot{q}^1) = A\dot{q}^1 + B, \\
\dot{q}^3 &= g^2(t,q^1,q^2,q^3,\dot{q}^1) = C\dot{q}^1 + D,
\end{aligned}$$

kde A, B, C, D jsou konstanty nebo funkce souřadnic (t, q^1, q^2, q^3). Pak každý vázaný systém $[\iota^* d\theta_\lambda]$ je regulární.

Důkaz 2

Rovnice vazby jsou ve tvaru

$$\begin{aligned}
Q:\dot{q}^2 &= g^1(t,q^1,q^2,q^3,\dot{q}^1) = A\dot{q}^1 + B, \\
\dot{q}^3 &= g^2(t,q^1,q^2,q^3,\dot{q}^1) = C\dot{q}^1 + D,
\end{aligned}$$

kde A, B, C, D jsou konstanty nebo funkce souřadnic (t, q^1, q^2, q^3). A tak pro členy vystupující v podmínce regularity dostáváme:

$$\begin{aligned}
L\circ\iota &= \frac{1}{2}m[(\dot{q}^1)^2 + (A\dot{q}^1+B)^2 + (C\dot{q}^1+D)^2] - V(t,q^1,q^2,q^3) = \\
&= \frac{1}{2}m[(1+A^2+C^2)(\dot{q}^1)^2 + (2AB+2CD)\dot{q}^1 + B^2 + D^2] - V(t,q^1,q^2,q^3) \\
\frac{\partial^2(L\circ\iota)}{(\partial\dot{q}^1)^2} &= \frac{1}{2}m\frac{\partial}{\partial\dot{q}^1}\left(2(1+A^2+C^2)\dot{q}^1 + 2AB + 2CD\right) = m(1+A^2+C^2)
\end{aligned}$$

Analogicky jako v předešlém případě se uplatní jen první výraz v determinantu.
Matice má pouze jeden prvek, ten je současně jejím determinantem, a je vždy nenulový:

$$\det\left(\frac{\partial^2(L\circ\iota)}{\partial\dot{q}^l\partial\dot{q}^s}\right) = m\det\left(1+A^2+C^2\right) = m(1+A^2+C^2) > 0.$$

Dokázali jsme tak, že podmínka regularity je splněna i pro každou vazbu danou dvěma rovnicemi afinními v rychlostech.

Nyní budeme studovat vazbu danou rovnicí

$$Q : A(\dot{q}^1)^2 + B(\dot{q}^2)^2 + C(\dot{q}^3)^2 = k,$$

kde A, B, C jsou konstanty nebo funkce souřadnic (t, q^1, q^2, q^3) a k je konstanta. Vydělíme-li rovnici C a zavedeme-li nové koeficienty $E = -\frac{A}{C},\ F = -\frac{B}{C},\ K = -\frac{k}{C}$, lze rovnici vazby zapsat v normálním tvaru:

$$Q : \dot{q}^3 = g(t, q^1, q^2, q^3, \dot{q}^1, \dot{q}^2) = \sqrt{E(\dot{q}^1)^2 + F(\dot{q}^2)^2 + K},$$

kde E, F, K jsou konstanty nebo funkce souřadnic (t, q^1, q^2, q^3).

Věta 3

Nechť $\lambda = Ldt$ je Lagrangián (2) a vazba Q je dána jednou rovnicí

$$Q : \dot{q}^3 = g(t, q^1, q^2, q^3, \dot{q}^1, \dot{q}^2) = \sqrt{E(\dot{q}^1)^2 + F(\dot{q}^2)^2 + K},$$

kde E, F, K jsou konstanty nebo funkce souřadnic (t, q^1, q^2, q^3).
Vázaný systém $[\iota^* d\theta_\lambda]$ je regulární, právě když vazba splňuje podmínky

$$\begin{aligned} E &\neq 0, -1, \\ F &\neq 0, -1, \\ K &\neq 0. \end{aligned}$$

Důkaz 3

Pro tuto vazbu sestavíme podmínku regularity. Na rozdíl od afinních vazeb, zde se uplatní všechny členy z obecného vzorce pro regularitu.

$$\begin{aligned} L \circ \iota &= \frac{1}{2} m[(\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2 + E(\dot{q}^1)^2 + F(\dot{q}^2)^2 + K] - V(t, q^1, q^2, q^3) \\ &= \frac{1}{2} m[(1+E)(\dot{q}^1)^2 + (1+F)(\dot{q}^2)^2 + K] - V(t, q^1, q^2, q^3), \\ \frac{\partial^2 (L \circ \iota)}{(\partial \dot{q}^1)^2} &= \frac{1}{2} m \frac{\partial}{\partial \dot{q}^1} \left(2(1+E)\dot{q}^1\right) = m(1+E), \\ \frac{\partial^2 (L \circ \iota)}{(\partial \dot{q}^2)^2} &= \frac{1}{2} m \frac{\partial}{\partial \dot{q}^2} \left(2(1+F)\dot{q}^2\right) = m(1+F), \\ \frac{\partial^2 (L \circ \iota)}{\partial \dot{q}^1 \partial \dot{q}^2} &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^3} &= m\dot{q}^3, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^3} \circ \iota &= m\sqrt{E(\dot{q}^1)^2 + F(\dot{q}^2)^2 + K}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{(\partial \dot q^1)^2} &= \frac{\partial}{\partial \dot q^1}\left([E(\dot q^1)^2+F(\dot q^2)^2+K]^{-\frac12} E\dot q^1\right)\\
&= -[E(\dot q^1)^2+F(\dot q^2)^2+K]^{-\frac32} E\dot q^1 E\dot q^1 + [E(\dot q^1)^2+F(\dot q^2)^2+K]^{-\frac12} E\\
&= \frac{E}{\sqrt{E(\dot q^1)^2+F(\dot q^2)^2+K}^3}(F(\dot q^2)^2+K),\\
\frac{\partial^2 g}{(\partial \dot q^2)^2} &= \frac{\partial}{\partial \dot q^2}\left(E(\dot q^1)^2+F(\dot q^2)^2+K)^{-\frac12} F\dot q^2\right) = \frac{F}{\sqrt{E(\dot q^1)^2+F(\dot q^2)^2+K}^3}(E(\dot q^1)^2+K),\\
\frac{\partial^2 g}{\partial \dot q^1 \partial \dot q^2} &= -(E(\dot q^1)^2+F(\dot q^2)^2+K)^{-\frac32} E\dot q^1 F\dot q^2 = \frac{-EF\dot q^1\dot q^2}{\sqrt{E(\dot q^1)^2+F(\dot q^2)^2+K}^3}.
\end{aligned}$$

Členy matice, jejíž determinant počítáme, budou:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2(L\circ\iota)}{(\partial \dot q^1)^2} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^3}\circ\iota\right)\frac{\partial^2 g}{(\partial \dot q^1)^2} &= m\left[(1+E) - \frac{E(F(\dot q^2)^2+K)}{E(\dot q^1)^2+F(\dot q^2)^2+K}\right] =\\
&= m\,\frac{E(\dot q^1)^2+F(\dot q^2)^2+K+E^2(\dot q^1)^2}{E(\dot q^1)^2+F(\dot q^2)^2+K} =\\
&= m\left[1+\frac{E^2(\dot q^1)^2}{E(\dot q^1)^2+F(\dot q^2)^2+K}\right]\\
\frac{\partial^2(L\circ\iota)}{(\partial \dot q^2)^2} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^3}\circ\iota\right)\frac{\partial^2 g}{(\partial \dot q^2)^2} &= m\left[(1+F) - \frac{F(E(\dot q^1)^2+K)}{E(\dot q^1)^2+F(\dot q^2)^2+K}\right] =\\
&= m\,\frac{E(\dot q^1)^2+F(\dot q^2)^2+K+F^2(\dot q^2)^2}{E(\dot q^1)^2+F(\dot q^2)^2+K} =\\
&= m\left[1+\frac{F^2(\dot q^2)^2}{E(\dot q^1)^2+F(\dot q^2)^2+K}\right]\\
\frac{\partial^2(L\circ\iota)}{\partial \dot q^1\partial \dot q^2} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^3}\circ\iota\right)\frac{\partial^2 g}{\partial \dot q^1\partial \dot q^2} &= m\,\frac{EF\dot q^1\dot q^2}{E(\dot q^1)^2+F(\dot q^2)^2+K},
\end{aligned}$$

$$m^2\det\begin{pmatrix} 1+\frac{E^2(\dot q^1)^2}{E(\dot q^1)^2+F(\dot q^2)^2+K} & \frac{EF\dot q^1\dot q^2}{E(\dot q^1)^2+F(\dot q^2)^2+K}\\ \frac{EF\dot q^1\dot q^2}{E(\dot q^1)^2+F(\dot q^2)^2+K} & 1+\frac{F^2(\dot q^2)^2}{E(\dot q^1)^2+F(\dot q^2)^2+K}\end{pmatrix} = m^2\left[1+\frac{E^2(\dot q^1)^2+F^2(\dot q^2)^2}{E(\dot q^1)^2+F(\dot q^2)^2+K}\right].$$

V determinantu je $m^2 \neq 0$, tedy determiant by se rovnal nule, kdyby

$$1+\frac{E^2(\dot q^1)^2+F^2(\dot q^2)^2}{E(\dot q^1)^2+F(\dot q^2)^2+K} = 0,$$

tj. kdyby

$$\begin{aligned}
E^2(\dot q^1)^2+F^2(\dot q^2)^2+E(\dot q^1)^2+F(\dot q^2)^2+K &= 0,\\
E(1+E)(\dot q^1)^2+F(1+F)(\dot q^2)^2+K &= 0.
\end{aligned}$$

Aby tato rovnice platila pro libovolná $\dot{q}^1, \dot{q}^2$, musí se rovnat nule všechny koeficienty, tedy:

$$\begin{aligned} K &= 0 \\ E = 0 &\vee E = -1 \\ F = 0 &\vee F = -1. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že regulární vazby jsou:

$$\begin{aligned} Q : \dot{q}^3 &= g(t, q^1, q^2, q^3, \dot{q}^1, \dot{q}^2) = \sqrt{E(\dot{q}^1)^2 + F(\dot{q}^2)^2 + K}, \\ E &\neq 0, -1, \\ F &\neq 0 - 1, \\ K &\neq 0, \end{aligned}$$

kde E, F, K jsou konstanty nebo funkce souřadnic (t, q^1, q^2, q^3).

Věta 4

Nechť $\lambda = Ldt$ je Lagrangián (2) a vazba Q je daná dvěma rovnicemi

$$\begin{aligned} Q : \dot{q}^2 &= g^1(t, q^1, q^2, q^3, \dot{q}^1) = \sqrt{D(\dot{q}^1)^2 + E}, \\ \dot{q}^3 &= g^2(t, q^1, q^2, q^3, \dot{q}^1) = \sqrt{F(\dot{q}^1)^2 + G}, \end{aligned}$$

kde D, E, F, G jsou konstanty nebo funkce souřadnic (t, q^1, q^2, q^3). Pak vázaný systém $[\iota^* d\theta_\lambda]$ je regulární, právě když nenastane některá z těchto možností:

$$\begin{aligned} (D, E, F, G) &= (0, 0, 0, 0), \\ (D, E, F, G) &= (D, 0, 0, 0), \\ (D, E, F, G) &= (0, 0, F, 0), \\ (D, E, F, G) &= (D, 0, -1 - D, 0), \\ (D, E, F, G) &= (0, 0, F, G), \\ (D, E, F, G) &= (-1, 0, 0, G), \\ (D, E, F, G) &= (0, 0, 0, G), \\ (D, E, F, G) &= (0, 0, -1, G), \\ (D, E, F, G) &= (D, E, 0, 0), \\ (D, E, F, G) &= (0, E, -1, 0), \\ (D, E, F, G) &= (0, E, 0, 0), \\ (D, E, F, G) &= (-1, E, 0, 0). \end{aligned}$$

Důkaz 4

Postupovat budeme stejně jako v předchozích případech - vyjádříme si jednotlivé členy z podmínky regularity, sestavíme matici a určíme její determinant.

$$\begin{aligned}
L \circ \iota &= \frac{1}{2}m\left[(\dot{q}^1)^2 + D(\dot{q}^1)^2 + E + F(\dot{q}^1)^2 + G\right] - V(t, q^1, q^2, q^3) = \\
&= \frac{1}{2}m[(1 + D + F)(\dot{q}^1)^2 + E + G] - V(t, q^1, q^2, q^3) \\
\frac{\partial^2(L \circ \iota)}{(\partial \dot{q}^1)^2} &= \frac{1}{2}m\frac{\partial}{\partial \dot{q}^1}\left[(1 + D + F)\dot{q}^1\right] = m(1 + D + F) \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^2} &= m\dot{q}^2 \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^2} \circ \iota &= m\sqrt{D(\dot{q}^1)^2 + E} \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^3} &= m\dot{q}^3 \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^3} \circ \iota &= m\sqrt{F(\dot{q}^1)^2 + G}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g^1}{(\partial \dot{q}^1)^2} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}^1}\left([D(\dot{q}^1)^2 + E]^{-\frac{1}{2}} D\dot{q}^1\right) = -[D(\dot{q}^1)^2 + E]^{-\frac{3}{2}} (D\dot{q}^1)^2 + [D(\dot{q}^1)^2 + E]^{-\frac{1}{2}} D \\
&= \frac{DE}{\sqrt{D(\dot{q}^1)^2 + E}^3} \\
\frac{\partial^2 g^2}{(\partial \dot{q}^1)^2} &= \frac{FG}{\sqrt{F(\dot{q}^1)^2 + G}^3}
\end{aligned}$$

Získáme matici 1×1, proto

$$\begin{aligned}
m \quad \det \quad & \left((1 + D + F) - \frac{DE}{D(\dot{q}^1)^2 + E} - \frac{FG}{F(\dot{q}^1)^2 + G}\right) = \\
= \quad & m\left[(1 + D + F)(D(\dot{q}^1)^2 + E)(F(\dot{q}^1)^2 + G) - DE(F(\dot{q}^1)^2 + G) - FG(D(\dot{q}^1)^2 + E)\right] = \\
= \quad & m\left[DF(\dot{q}^1)^4 + (EF + DG)(\dot{q}^1)^2 + EG + D^2F(\dot{q}^1)^4 + (DEF + D^2G)(\dot{q}^1)^2 + DEG + \right. \\
+ \quad & \left. DF^2(\dot{q}^1)^4 + (EF^2 + DGF)(\dot{q}^1)^2 + EFG - DEF(\dot{q}^1)^2 - DEG - FGD(\dot{q}^1)^2 - EFG\right] = \\
= \quad & m[(1 + D + F)DF(\dot{q}^1)^4 + (EF + DG + D^2G + EF^2)(\dot{q}^1)^2 + EG]
\end{aligned}$$

Nyní chceme vyloučit ty případy, kdy bude determinant nulový. Hmotnost m je různá od nuly, podívejme se podrobněji na zbývající činitel. Vidíme, že determinant bude různý od nuly pro všechny body vyjma řešení kvadratické rovnice s neznámou $(\dot{q}^1)^2$:

$$(1 + D + F)DF(\dot{q}^1)^4 + (EF + DG + D^2G + EF^2)(\dot{q}^1)^2 + EG = 0.$$

Má-li rovnice platit pro všechna $\dot{q}^1$, musí být všechny koeficienty současně nulové, čili

$$\begin{aligned}
(1 + D + F) = 0 \quad \vee & \quad D = 0 \vee F = 0 \\
(EF + DG + D^2G + EF^2) \quad = & \quad 0 \\
E = 0 \quad \vee & \quad G = 0.
\end{aligned}$$

A to nastane pro některou z následujících možností (v prvních čtyřech možnostech uvažujeme $E = G = 0$, v následujících dvou vycházíme jen z toho, že $E = 0$, a v posledních dvou z toho, že $G = 0$):

$$
\begin{aligned}
(D,E,F,G) &= (0,0,0,0),\\
(D,E,F,G) &= (D,0,0,0),\\
(D,E,F,G) &= (0,0,F,0),\\
(D,E,F,G) &= (D,0,-1-D,0),\\
(D,E,F,G) &= (0,0,F,G),\\
(D,E,F,G) &= (-1,0,0,G),\\
(D,E,F,G) &= (0,0,0,G),\\
(D,E,F,G) &= (0,0,-1,G),\\
(D,E,F,G) &= (D,E,0,0),\\
(D,E,F,G) &= (0,E,-1,0),\\
(D,E,F,G) &= (0,E,0,0),\\
(D,E,F,G) &= (-1,E,0,0).
\end{aligned}
$$

Poděkování

Tato práce vznikla za podpory grantu GAČR 201/09/0981. Autorka též děkuje vedoucí práce prof. O. Krupkové za cenné rady a pomoc.

Reference

[1] F. Cantrijn, W. Sarlet, D.J. Saunders: Regularity aspects and Hamiltonization of nonholonomic systems, *J.Phys. A: Math. Gen.* **32** (1999) 6869-6890.

[2] N.G. Chetaev: *Izv. Kazan. Fiz.-Mat. Obsc.* **6** (1932-33), 323-326.

[3] G. Giachetta: *J. Math. Phys.* **33** (1992), 1652-1665.

[4] W.S. Koon, J.E. Marsden: The Hamiltonian and Lagrangian approaches to the dynamics of nonholonomic systems, *Rep. Math. Phys.* **40** (1997) 21-62.

[5] D. Krupka, Some geometric aspects of variational problems in fibered manifolds, *Folia Fac. Sci. Nat. Univ. Purk. Brunensis,* Physica **14**, Brno, Czechoslovakia, 1973, 65pp; ArXiv:math-ph/0110005.

[6] O. Krupková: Mechanical systems with nonholonomic constraints, *J. Math. Phys.* **38** (1997) 5098-5126.

[7] O. Krupková: *The Geometry of Ordinary Variational Equations*, LNM, Springer, Berlin, 1997.

[8] O. Krupková: Recent results in the geometry of constrained systems, *Rep. Math. Phys.* **49** (2002).

[9] O. Krupková, P. Volný: Hamilton equations for non-holonomic systems, in: *Differential Geometry and its Applications*, Proc. Conf., Opava, 2001 (Silesian University, Opava, 2003).

[10] M. de León, J.C. Marrero, D.M. de Diego: Non-holonomic Lagrangian systems in jet manifolds, *J. Phys. A: Math. Gen.* **30** (1997) 1167-1190.

[11] E. Massa, E. Pagani: A new look at classical mechanics of constrained systems, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **66** (1997) 1-36.

[12] W. Sarlet: A direct geometrical construction of the dynamics of non-holonomic Lagrangian systems, *Extracta Mathematicae* **11** (1996) 202-212.

[13] W. Sarlet, F. Cantrijn, D.J. Saunders: A geometrical framework for the study of non-holonomic Lagrangian systems, *J. Phys. A: Math. Gen.* **28** (1995) 3253-3268.

[14] D. J. Saunders: *The Geometry of Jet Bundles*, Cambridge Univ. Press, 2. Ed., 2004.

[15] D.J. Saunders, W. Sarlet, F. Cantrijn: A geometrical framework for the study of non-holonomic Lagrangian systems II., *J. Phys. A: Math. Gen.* **29** (1996) 4265-4274.