Katedra Matematiky
Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzita Komenského, Bratislava

Stabilizačný Efekt Difúzie a Dirichletovej Okrajovej Podmienky

Študentská vedecká konferencia 2009

Autor: Ondrej Budáč
Školiteľ: Prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.

Bratislava, 2009

Ďakujem svojmu školiteľovi, Prof. RNDr. Marekovi Filovi, DrSc.
za ochotu a množstvo času, bez ktorého by táto práca nevznikla.

Obsah

1 Úvod **2**

2 Formulácia výsledku **4**

3 Rast nelinearity f **5**

4 Stacionárne riešenia **6**

5 Dôkaz Vety 2.1 **10**

Abstrakt

Je známe, že difúzia spolu s Dirichletovou okrajovou podmienkou vie zabrániť efektu zvanému blow-up alebo explózia riešenia. Skúmame, aký silný je tento stabilizačný efekt pre jednorozmerné reakčno-difúzne rovnice. Ukážeme, že ak pre každé riešenie ODR nastane explózia riešenia v konečnom čase, potom pre príslušnú PDR (získanú pridaním difúzie a Dirichletovej okrajovej podmienky) buď existuje neohraničená postupnosť stacionárnych riešení, alebo existuje neohraničené riešenie závislé od času.

Abstract

It is known that diffusion together with Dirichlet boundary conditions can inhibit the occurrence of blow-up. We examine the question how strong is this stabilizing effect for reaction-diffusion equations in one space-dimension. We show that if all positive solutions of an ODE blow up in finite time then for the corresponding parabolic PDE (obtained by adding diffusion and the Dirichlet boundary condition) there is either an unbounded sequence of stationary solutions or an unbounded time-dependent solution.

1 Úvod

Uvažujme nelineárnu úlohu

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u), & |x| < L,\ t > 0, \\ u(\pm L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & |x| \leq L, \end{cases} \tag{1.1}$$

kde $L > 0$, $u_0 \in C([-L, L])$ a $f \in C^1([0, \infty))$ spĺňajú

$$f(u) > 0 \qquad \text{pre } u > 0, \tag{1.2}$$

$$\int_1^\infty \frac{du}{f(u)} < \infty. \tag{1.3}$$

Za týchto predpokladov neexistujú globálne kladné riešenia začiatočnej úlohy

$$\begin{cases} U_t = f(U), \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{1.4}$$

pretože explodujú pre každé $U_0 > 0$. V [2] je ukázané, že existuje hladká funkcia f, ktorá spĺňa (1.2), (1.3) a riešenie (1.1) je globálne a ohraničené pre každé ohraničené u_0, taktiež viď [1] a sekciu 19.3 v [3].

V tejto práci sa budeme zaoberať tým, aký silný je stabilizačný efekt difúzie spolu s Dirichletovou okrajovou podmienkou. Presnejšie, skúmame, či existuje taká funkcia f, pre ktorú platí (1.2), (1.3), riešenie u úlohy (1.1) je globálne pre každé u_0 a existuje konštanta $C > 0$, ktorá závisí od L, f ale nie od u_0 taká, že

$$\lim_{t \to \infty} \|u(\cdot, t)\|_{C([-L,L])} \leq C.$$

V [2] a [1] je skonštruovaná funkcia f, pre ktorú existuje neohraničená postupnosť stacionárnych riešení

$$\begin{cases} v_{xx} + f(v) = 0, & |x| < L,\ v \geq 0, \\ v(\pm L) = 0, \end{cases} \tag{1.5}$$

čo znamená, že konštanta C s danou vlastnosťou neexistuje, viď poznámku za Propozíciou 3.1.

Ak $f(u) = ku$, $k > 0$, potom riešenie (1.4) rastie exponenciálne pre každé $U_0 > 0$, ale riešenie (1.1) klesá k nule exponenciálne, ak predpokladáme

$L < \pi/\sqrt{k}$. Zaujíma nás, či podobná zmena správania môže nastať pre nejakú superlineárnu funkciu f.

V [2] je podaný príklad dvoch funkcií f, g takých, že niektoré riešenia systému

$$U_t = f(U, V),$$
$$V_t = g(U, V),$$

explodujú v konečnom čase, zatiaľ čo všetky riešenia príslušného parabolického systému

$$u_t = d_1 \Delta u + f(u, v), \qquad x \in \Omega,\ t > 0,$$
$$v_t = d_2 \Delta v + g(u, v), \qquad x \in \Omega,\ t > 0,$$

pre $d_1, d_2 > 0$ s Dirichletovou okrajovou podmienkou

$$u(x, t) = v(x, t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0,$$

sú globálne a konvergujú k nule pre $t \to \infty$.

2 Formulácia výsledku

Pre pevné $L > 0$ označme S množinu všetkých riešení (1.5). Ak f spĺňa (1.2), potom ľahko nahliadneme, že S je usporiadaná. Tým myslíme, že ak $v_1, v_2 \in S$, $v_1 \not\equiv v_2$ potom buď $v_1(x) < v_2(x)$, alebo $v_1(x) > v_2(x)$ pre všetky $|x| < L$. Náš hlavný výsledok zhrnieme vo Vete 2.1.

Veta 2.1. *Nech* $L > 0$ *je ľubovoľné, funkcia* $f \in C^1([0,\infty))$ *spĺňa* (1.2) *a*

$$\limsup_{u\to\infty} \frac{F(u)}{u^2} = \infty, \qquad F(u) := \int_0^u f(v)\,dv. \tag{2.1}$$

Potom nastáva jeden z nasledujúcich prípadov

(i) $S = \emptyset$ *a pre každé* $u_0 \in C([-L,L])$, $u_0 \geq 0$ *existuje* $0 < T_{max} \leq \infty$ *také, že*

$$\lim_{t\uparrow T_{max}} \max_{|x|\leq L} u(x,t) = \infty; \tag{2.2}$$

(ii) $S \neq \emptyset$, *S je ohraničená, a ak* $v^* \in S$ *je maximálne stacionárne riešenie, tak pre každé* $u_0 \in C([-L,L])$, $u_0 \geq v^*$, $u_0 \not\equiv v^*$ *existuje* $0 < T_{max} \leq \infty$ *také, že platí* (2.2)*;*

(iii) $S \neq \emptyset$ *a existuje postupnosť* $\{v_n\} \subset S$ *taká, že*

$$\lim_{n\to\infty} v_n(0) = \infty.$$

V Propozícii 3.1 dokážeme, že z (1.3) vyplýva (2.1). Potom z Vety 2.1 plynie, že difúzia spolu s Dirichletovými okrajovými podmienkami nevedia vytvoriť ohraničenú množinu, ktorá by priťahovala všetky riešenia (1.1), dokonca aj keď podmienka na rast f je slabšia než v (1.3). Obzvlášť, ak f spĺňa (1.2), (2.1) a navyše riešenie u úlohy (1.1) je globálne pre každú ohraničenú počiatočnú funkciu u_0, potom je S neohraničená (ako v príkladoch z [1], [2]).

Ako príklad funkcie f, pre ktorú nastáva (i) pre dostatočne veľké L, uvedieme $f(u) = u\log(u+a)$, $a > 1$ (potom $T_{max} = \infty$ pre každé $u_0 \geq 0$), alebo $f(u) = e^u$ (potom $T_{max} < \infty$ pre každé u_0).

Druhý prípad (ii) nastáva napríklad pre $f(u) = u^p$, $p > 1$ a $L > 0$ je ľubovoľné. Potom $S = \{0, v^*\}$ a $T_{max} < \infty$ pre každé $u_0 \geq v^*$, $u_0 \not\equiv v^*$.

Nejaké postačujúce podmienky na $S = \emptyset$, $S \neq \emptyset$, alebo neohraničenosť S dokážeme v Odseku 4. Odsek 3 sa venuje faktu, že z (1.3) vyplýva (2.1). V Odseku 4 skúmame množinu S a v Odseku 5 dokážeme Vetu 2.1.

3 Rast nelinearity f

Propozícia 3.1. *Nech $f \in C([0,\infty))$ spĺňa (1.2) a (1.3). Potom*

$$\lim_{u\to\infty} \frac{F(u)}{u^2} = \infty.$$

Dôkaz. Budeme dokazovať sporom. Predpokladajme, že

$$\liminf_{u\to\infty} \frac{F(u)}{u^2} < +\infty.$$

Potom existuje $c > 0$ a rastúca postupnosť $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \infty, \qquad \frac{F(u_n)}{u_n^2} < c, \qquad \text{pre } n \in \mathbb{N}$$

Pomocou indukcie dokážeme, že pre $\varepsilon > 0$ existuje rastúca postupnosť $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$, $y_0 = 1$ taká, že

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{ds}{f(s)} \geq \frac{1}{c} - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}. \tag{3.1}$$

Predpokladajme, že sme našli $y_1, \ldots, y_k$ ($k \geq 1$), ktoré vyhovujú (3.1). Označme

$$I = \int_0^{y_k} f(s)\, ds,$$

a zvoľme m, aby platilo $u_m > y_k$. Použitím Cauchyho nerovnosti dostaneme

$$\left(\int_{y_k}^{u_m} \frac{ds}{f(s)}\right)\left(\int_{y_k}^{u_m} f(s)\, ds\right) \geq \left(\int_{y_k}^{u_m} ds\right)^2,$$

čiže

$$\int_{y_k}^{u_m} \frac{ds}{f(s)} \geq \frac{(u_m - y_k)^2}{F(u_m) - I} \geq \frac{(u_m - y_k)^2}{cu_m^2 - I} \to \frac{1}{c}$$

pre $u_m \to \infty$. Tým pádom môžeme zvoliť u_m dostatočne veľké, aby

$$\int_{y_k}^{u_m} \frac{ds}{f(s)} \geq \frac{(u_m - y_k)^2}{cu_m^2 - I} \geq \frac{1}{c} - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Teraz položme $y_{k+1} = u_m$, čím je indukcia kompletná. Z (3.1) získame

$$\int_1^{y_{k+1}} \frac{ds}{f(s)} \geq \frac{k+1}{c} - \sum_{l=0}^{k} \frac{\varepsilon}{2^{l+1}} \geq \frac{k+1}{c} - \varepsilon \to \infty$$

pre $k \to \infty$. To je spor s (1.3).

4 Stacionárne riešenia

V tejto časti budeme skúmať S—množinu riešení úlohy (1.5). Je známe, že v je netriviálne riešenie úlohy (1.5) práve vtedy, keď rovnica

$$T(m) := \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^m \frac{ds}{\sqrt{F(m) - F(s)}} = L \tag{4.1}$$

má riešenie $m > 0$. Potom

$$m = v(0) = \max_{|x| \leq L} v(x), \qquad v(x) = v(-x),$$

a v je dané vzťahom

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{v(x)}^m \frac{ds}{\sqrt{F(m) - F(s)}} = |x|.$$

Propozícia 4.1. *Nech $f \in C([0, \infty))$ spĺňa (1.2). Potom*

$$\liminf_{m \to \infty} T(m) = 0 \tag{4.2}$$

práve vtedy, keď

$$\limsup_{u \to \infty} \frac{F(u)}{u^2} = \infty. \tag{4.3}$$

Dôkaz. Predpokladajme, že (4.3) platí. Zvoľme $a > 0$, prirodzené číslo $n > 2F(a)/a^2$ a najmenšie číslo $u_n > a$ také, že

$$\frac{F(u_n)}{u_n^2} = n.$$

Potom vezmime $y_n \in (a, u_n)$ také, že

$$\frac{F(y_n)}{y_n^2} = \frac{n}{2} \qquad \text{a} \qquad \frac{n}{2} \leq \frac{F(z)}{z^2} \leq n \quad \text{ pre } z \in [y_n, u_n].$$

Teraz zhora ohraničíme $T(u_n)$:

$$\begin{aligned} T(u_n) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{u_n} \frac{ds}{\sqrt{F(u_n) - F(s)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_0^{y_n} \frac{ds}{\sqrt{F(u_n) - F(s)}} + \int_{y_n}^{u_n} \frac{ds}{\sqrt{F(u_n) - F(s)}} \right) =: \frac{1}{\sqrt{2}} (I_1 + I_2), \end{aligned}$$

kde

$$I_2 \leq \int_{y_n}^{u_n} \frac{ds}{\sqrt{nu_n^2 - ns^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{u_n} \frac{ds}{\sqrt{u_n^2 - s^2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{n}},$$

a

$$I_1 \leq \int_0^{y_n} \frac{ds}{\sqrt{F(u_n) - F(y_n)}} = \frac{y_n}{\sqrt{nu_n^2 - ny_n^2/2}} \leq \frac{u_n}{\sqrt{nu_n^2 - nu_n^2/2}} = \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Z toho dostávame

$$T(u_n) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} \right) \to 0 \quad \text{pre } n \to \infty.$$

Keďže $u_n \to \infty$, získame (4.2).

Ďalej dokážeme, že (4.2) implikuje (4.3). Predpokladajme, že (4.3) neplatí. Potom existuje $M > 0$ také, že $F(m) < Mm^2$ pre $m > 1$ a

$$T(m) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^m \frac{ds}{\sqrt{F(m) - F(s)}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^m \frac{ds}{\sqrt{F(m)}} = \frac{m}{\sqrt{2F(m)}}.$$

Preto

$$T(m) > \frac{1}{\sqrt{2M}} \quad \text{pre } m > 1.$$

Poznámka 4.1. *Z Propozícií 3.1, 4.1 vyplýva, že ak f volíme ako v [1] alebo [2], potom (4.2) platí. Na druhú stranu, konštrukcia f v [1] alebo [2] zaručuje*

$$\limsup_{m \to \infty} T(m) = \infty.$$

To znamená, že pre každé $L > 0$ existuje postupnosť $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$, $m_n \to \infty$, riešení (4.1).

Ďalej budeme skúmať správanie $T(m)$ pre $m \to \infty$.

Propozícia 4.2. *Nech $f \in C([0, \infty))$ spĺňa (1.2). Potom ak platí*

(i) $$\lim_{u \to \infty} \frac{f(u)}{u} = \infty, \qquad \textit{tak} \qquad \lim_{m \to \infty} T(m) = 0.$$

(ii) $$\liminf_{u \to \infty} \frac{f(u)}{u} > 0, \qquad \textit{tak} \qquad \limsup_{m \to \infty} T(m) < \infty.$$

(iii) $$\liminf_{u \to \infty} \frac{F(u)}{u^2} = 0, \qquad \textit{tak} \qquad \limsup_{m \to \infty} T(m) = \infty.$$

Dôkaz. (i) Pre každé $n > 0$ existuje $a > 0$ také, že

$$f(u) > nu \quad \text{pre} \quad u > a. \tag{4.4}$$

Zvoľme $m > 2a$. Nájdeme horné ohraničenie $T(m)$ nasledovne:

$$\begin{aligned} T(m) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^m \frac{ds}{\sqrt{F(m) - F(s)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_0^a \frac{ds}{\sqrt{F(m) - F(s)}} + \int_a^m \frac{ds}{\sqrt{F(m) - F(s)}} \right) =: \frac{1}{\sqrt{2}}(I_1 + I_2). \end{aligned}$$

Na odhad I_1 použijeme (4.4):

$$F(m) - F(s) > F(m) - F(a) = \int_a^m f(u)\,du > \frac{n}{2}(m^2 - a^2) > \frac{3}{2}na^2.$$

Preto

$$I_1 = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{F(m) - F(s)}} < \sqrt{\frac{2}{3n}}.$$

Z (4.4) vyplýva pre $s \in [a, m]$

$$F(m) - F(s) = \int_s^m f(u)\,du > \frac{n}{2}(m^2 - s^2).$$

Potom

$$I_2 = \int_a^m \frac{ds}{\sqrt{F(m) - F(s)}} < \sqrt{\frac{2}{n}} \int_0^m \frac{ds}{\sqrt{m^2 - s^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2n}}.$$

Dostávame

$$T(m) < \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{2}{3n}} + \frac{\pi}{\sqrt{2n}} \right) \to 0 \quad \text{pre} \quad n \to \infty.$$

Časť (ii) dokážeme podobne. Za daných predpokladov existujú $c, a > 0$ také, že

$$f(u) > cu \quad \text{pre} \quad u > a.$$

Teraz môžeme zopakovať dôkaz (i), pričom n nahradíme c a získame

$$T(m) < \frac{1}{\sqrt{3c}} + \frac{\pi}{2\sqrt{c}} \quad \text{pre} \quad m > 2a.$$

Na dôkaz (iii) zvoľme postupnosť $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n \to 0$ a $\{m_n\}$, $m_n \to \infty$ takú, že $F(m_n) < \varepsilon_n m_n^2$. Potom

$$T(m_n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{m_n} \frac{ds}{\sqrt{F(m_n) - F(s)}} > \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{m_n} \frac{ds}{\sqrt{F(m_n)}} > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}}.$$

Poznámka 4.2. *Z Propozície 4.2 môžeme robiť nejaké závery o riešiteľnosti rovnice (4.1).*

- *Napríklad, ak f volíme ako v Propozícii 4.2 (iii) a spĺňa (4.3), potom S je neohraničená pre každé $L > 0$.*
- *Ak f volíme ako v Propozícii 4.2 (i), potom $S = \emptyset$ alebo $S \neq \emptyset$ je ohraničená.*
- *Ak $f(0) = 0$ a $f'(0) > 0$ alebo $f(0) > 0$ (čo zaručí, že $\lim_{m\to 0} T(m) < \infty$, viď [4]) a f volíme ako v Propozícii 4.2 (ii), potom $S = \emptyset$ ak L je dostatočne veľké.*
- *Ak $f(0) = f'(0) = 0$, čo implikuje $\lim_{m\to 0} T(m) = \infty$ (viď [4]) a platí (4.3), potom $S \neq \emptyset$ pre každé $L > 0$.*

5 Dôkaz Vety 2.1

Dôkaz. Predpokladajme, že $S \neq \emptyset$, S je ohraničená a $v^* \not\equiv 0$. Nech $m^* = v^*(0)$ je najväčšie riešenie (4.1). Propozícia 4.1 garantuje, že (4.2) platí, preto $T(m^* + \varepsilon) < L$ pre $\varepsilon > 0$. Nech w_ε je riešenie začiatočnej úlohy

$$\begin{aligned} &w_{xx} + f(w) = 0, \\ &w(0) = m^* + \varepsilon, \quad w_x(0) = 0. \end{aligned}$$

Potom existuje práve jedno $x_\varepsilon \in (0, L)$ také, že $w_\varepsilon(x_\varepsilon) = v^*(x_\varepsilon)$. Položme

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} w_\varepsilon(x), & |x| \leq x_\varepsilon, \\ v^*(x), & x_\varepsilon < |x| \leq L. \end{cases}$$

Pre riešenie u^ε úlohy (1.1) s $u_0(x) = \varphi_\varepsilon(x)$ máme $u_t^\varepsilon(x,t) \geq 0$ pre $(x,t) \in [-L, L] \times (0, T_{max}^\varepsilon)$, kde $T_{max}^\varepsilon \leq \infty$ maximálny čas existencie pre u^ε, viď Propozíciu 52.6 v [3]. Teraz ľahko vidíme, že u^ε nemôže ostať ohraničené, pretože potom $T_{max}^\varepsilon = \infty$ (pozri Sekciu 16 v [3]) a $u^\varepsilon(x,t) \to \psi^\varepsilon(x)$ pre $t \to \infty$, kde $\psi^\varepsilon \in S$, $\psi^\varepsilon > v^*$ v $(-L, L)$, viď Lema 53.10 v [3].

Ak u_0 je ako vo Vete 2.1 (ii), potom pre každé $\tau \in (0, T_{max})$ existuje $\varepsilon > 0$ také, že $u(\cdot, \tau) \geq \varphi_\varepsilon$ v $[-L, L]$ a z porovnania dostávame, že u je neohraničené.

Ak $f(0) = 0$ a $S = \{0\}$, tak zdôvodnenie trochu zmodifikujeme. V tomto prípade neexistuje riešenie (4.1), ale dôkaz môžeme zopakovať s $v^* \equiv 0$ a w_ε, ktoré je riešením

$$\begin{aligned} &w_{xx} + f(w) = 0, \\ &w(0) = \varepsilon, \quad w_x(0) = 0. \end{aligned}$$

Ak $S = \emptyset$, potom nutne $f(0) > 0$ a riešenie u úlohy (1.1) s $u_0 \equiv 0$ nemôže ostať ohraničené.

Literatúra

[1] M. Fila and H. Ninomiya, *Reaction versus diffusion: blow-up induced and inhibited by diffusivity*, Russian Mathematical Surveys **60** (2005), 1217–1235.

[2] M. Fila, H. Ninomiya and J.L. Vazquez, *Dirichlet boundary conditions can prevent blow-up in reaction diffusion equations and systems*, Discr. Cont. Dyn. Systems **14** (2006), 63–74.

[3] P. Quittner and Ph. Souplet, Superlinear Parabolic Problems. Blow-up, Global Existence and Steady States, Birkhäuser Advanced Texts, Birkhäuser, Basel etc., 2007.

[4] R. Schaaf, Global Solution Branches of Two Point Boundary Value Problems, Lecture Notes in Mathematics. 1458, Springer-Verlag, Berlin etc., 1990.