Univerzita Karlova v Prahe
Matematicko-fyzikálna fakulta

**Študentská vedecká odborná činnosť
v matematike a informatike**

Rastislav Oľhava

Absolútna spojitosť normy na slabom Lebesgueovom priestore

Katedra matematickej analýzy

Študijný program: Matematika, obecná matematika

2009

Rád by som vyjadril svoje poďakovanie Doc. Ľubošovi Pickovi, pod ktorého dozorom sa moja práca rodila, za podnetné konzultácie, motiváciu, a tiež za hodnotné rady pri spisovaní.

Prehlasujem, že som túto prácu napísal samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím so zapožičiavaním a jej zverejňovaním.

V Prahe dňa 20. IV. 2009 Rastislav Oľhava

Obsah

Úvod

Táto práca je členená na štyri kapitoly, pričom tvoria dva celky.

Úlohou prvých troch kapitol je zaviesť pojmy a odvodiť ich základné vlastnosti, ktoré budú potrebné v hlavnej časti mojej práce, v štvrtej kapitole.

V prvej kapitole si zavedieme všeobecnú štruktúru, Banachov priestor funkcií generovaný svojou funkčnou normou. K nemu pripojíme asociovaný priestor s asociovanou normou a duálne vyjadrenie normy prvkov z asociovaného priestoru. Nakoniec uvedieme pre našu prácu najpodstatnejšie pojmy – absolútnu spojitosť normy a slabé Lebesgueove priestory.

V druhej kapitole zadefinujeme distribučnú funkciu a pomocou nej aj nerastúce prerovnanie, pričom pre oba pojmy uvedieme ich aplikáciu na jednoduché funkcie. Tiež si rozvinieme základné vlastnosti týchto funkcií, ktoré predovšetkým mapujú vzťahy medzi pôvodnými funkciami a ich distribučnými funkciami príp. nerastúcimi prerovnaniami.

Tretia kapitola nadväzuje na druhú a venuje sa Hardyovej-Littlewoodovej nerovnosti, ktorá objasňuje základný vzťah medzi súčinmi funkcií a súčinmi ich nerastúcich prerovnaní.

Takmer všetky dôkazy v prvých troch kapitolách sú vynechané a môžte ich nájsť v publikácii Bennett, Sharpley [1], ktorá je zároveň hlavným zdrojom informácií, uvedených v tomto celku.

Štvrtá kapitola pozostáva zo štyroch tvrdení, ktoré prinášajú charakterizáciu funkcií s absolútne spojitou normou v slabých Lebesgueových priestoroch, čo bolo hlavným cieľom tejto práce.

Kapitola 1

Banachov priestor funkcií

V úvodnej kapitole sa zoznámime s Banachovými priestormi funkcií a ich základnými vlastnosťami, ktoré budeme potrebovať v tejto práci. Banachove priestory funkcií sú Banachove priestory pozostávajúce z merateľných funkcií, v ktorých norma určitým spôsobom súvisí s mierou v priestore, na ktorom sú funkcie definované. Napriek tomu, že naším cieľom sú slabé L^p-priestory, ktoré nie sú Banachovými priestormi funkcií, definované pojmy budú dávať zmysel aj pre ne.

Pre našu prácu budeme potrebovať priestor s mierou, na ktorom budú definované funkcie, s ktorými budeme pracovať. V ďalšom texte ho budeme vždy, ak nepovieme inak, považovať za σ-konečný priestor s úplnou mierou.

Definícia 1.1. Nech (R, μ) je priestor s mierou taký, ako sme ho opísali vyššie. Nech $\mathcal{M}^+(R, \mu)$ (skrátene $\mathcal{M}^+$) je podmnožina všetkých μ-merateľných funkcií na R takých, že ich hodnoty ležia v $[0, \infty]$. Charakteristickú funkciu μ-merateľnej podmnožiny E priestoru R značíme χ_E. Hovoríme, že zobrazenie $\rho : \mathcal{M}^+ \to [0, \infty]$ je *Banachova funkčná norma* (alebo jednoducho *funkčná norma*) ak pre všetky f, g a f_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, z $\mathcal{M}^+$, pre všetky konštanty $a \geq 0$ a pre všetky μ-merateľné podmnožiny E priestoru R platia nasledujúce vlastnosti:

$$
\begin{aligned}
&(V1) \quad \rho(f) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \ \mu\text{-s.v.}, \qquad \rho(af) = a\rho(f),\\
&\qquad\quad\ \rho(f+g) \leq \rho(f) + \rho(g);\\
&(V2) \quad 0 \leq g \leq f \ \mu\text{-s.v.} \quad \Rightarrow \quad \rho(g) \leq \rho(f);\\
&(V3) \quad 0 \leq f_n \uparrow f \ \mu\text{-s.v.} \quad \Rightarrow \quad \rho(f_n) \uparrow \rho(f);\\
&(V4) \quad \mu(E) < \infty \quad \Rightarrow \quad \rho(\chi_E) < \infty;\\
&(V5) \quad \mu(E) < \infty \quad \Rightarrow \quad \int_E f \, d\mu \leq C_E \rho(f);
\end{aligned}
$$

pre nejakú konštantu C_E, $0 < C_E < \infty$, ktorá závisí na E a ρ, ale nezávisí na f.

Označme $\mathcal{M}(R, \mu)$ množinu všetkých μ-merateľných reálnych (alebo komplexných) funkcií na R a $\mathcal{M}_0(R, \mu)$ tie z nich, ktoré sú konečné μ-s.v. Ich zápisy budeme skracovať na $\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}_0$. Tak ako zvyčajne, namiesto funkcií pracujeme z triedami funkcií, pričom jedna trieda zahŕňa funkcie, ktoré sa líšia len na množine miery nula.

Definícia 1.2. Nech ρ je funkčná norma. Súbor $X = X(\rho)$ všetkých funkcií z $\mathcal{M}$ pre ktoré platí $\rho(|h|) < \infty$ nazývame *Banachov priestor funkcií* a pre $f \in X$ definujeme

$$\|f\|_X = \rho(|f|).$$

Definícia 1.3. Nech ρ je funkčná norma, jej *asociovanou normou* ρ' *nazývame* zobrazenie definované takto

$$\rho'(g) = \sup\left\{\int_R fg\,d\mu : f \in \mathcal{M}^+, \rho(f) \leq 1\right\}, \qquad \text{pre } g \in \mathcal{M}^+. \tag{1.1}$$

Tvrdenie 1.4. *Nech ρ je funkčná norma, potom jej asociovaná norma ρ' je tiež funkčná norma.*

Definícia 1.5. Nech ρ je funkčná norma a nech $X = X(\rho)$ je Banachov priestor funkcií určený ρ (ako v Definícii 1.2). Nech ρ' je asociovaná norma ρ. Banachov priestor funkcií $X(\rho')$ určený ρ' nazývame *asociovaný priestor* k X a značíme ho X'.

Poznámka 1.6. Z definície asociovanej normy a definície Banachovho priestoru funkcií plynie, že norma funkcie g v asociovanom priestore X' je daná

$$\|g\|_{X'} = \sup\{\int_R |fg|\,d\mu : f \in X, \|f\|_X \leq 1\}. \tag{1.2}$$

Poznámka 1.7. Platí tvrdenie, že každý Banachov priestor funkcií X je zhodný s jeho druhým asociovaným priestorom X''. Teda, že f patrí do X práve vtedy, ak patrí do X'' a platí

$$\|f\|_X = \|f\|_{X''}.$$

Toto tvrdenie, nie je jednoduché dokázať, ale dôkaz môžme nájsť v Bennett, Sharpley [1] s. 10.

Ako poslednú vlastnosť abstraktných Banachových priestorov funkcií si zavedieme absolútnu spojitosť normy. Pri tom budeme používať $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ ľubovoľnú postupnosť μ-merateľných podmnožín R. Ďalej použijeme zápis $E_n \to \emptyset$ μ-s.v. ak charakteristická funkcia χ_{E_n} konverguje k 0 bodovo μ-s.v. Nie je ťažké vidieť, že $E_n \to \emptyset$ μ-s.v. práve vtedy, ak limes superior

$$\limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} E_n$$

postupnosti $\{E_n\}$ je množina μ-miery nula.

Definícia 1.8. Hovoríme, že funkcia f v Banachovom priestore funkcií X *má absolútne spojitú normu v* X, ak $\|f\chi_{E_n}\| \to 0$ pre každú postupnosť množín $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ spĺňajúcu $E_n \to \emptyset$ μ-s.v. Množinu všetkých funkcií s absolútne spojitou normou značíme X_a. Ak $X = X_a$ hovoríme, že priestor X *má absolútne spojitú normu.*

Na záver si zadefinujeme priestory, ktorým sa budeme venovať v hlavnej časti tejto práce – slabé Lebesgueove priestory.

Definícia 1.9. *Slabý Lebesgueov priestor* $L^p(R,\mu)$ značíme $L^{p,\infty}(R,\mu)$ a pre $p \in [1,\infty)$ definujeme

$$L^{p,\infty}(R,\mu) := \{f \in M(R,\mu); \|f\|_{p,\infty} := \sup_{0<\lambda<\infty} \lambda\mu(\{|f| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} < \infty\}.$$

Poznámka 1.10. Keď bude zrejmé o ktorý priestor s mierou ide budeme písať $L^{p,\infty}$ namiesto $L^{p,\infty}(R,\mu)$.

Poznámka 1.11. „Norma“ $\|\cdot\|_{p,\infty}$, pomocou ktorej sme si definovali slabý Lebesgueov priestor $L^{p,\infty}$ (značíme tiež $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$) nie je v skutočnosti norma. Pre zaujímavosť, pre $p > 1$, v priestore $L^{p,\infty}$ je „norma“ $\|\cdot\|_{p,\infty}$ ekvivalentná norme (tentoraz už skutočnej norme) $\|\cdot\|_{(p,\infty)}$, pričom priestor $L^{1,\infty}$ už ekvivalentne normovateľný nie je. V tejto kapitole sme si zadefinovali pojmy pre Banachove priestory funkcií. Slabé Lebesgueove priestory nie sú Banachovými priestormi funkcií, napriek tomu však pojmy ako asociovaný priestor a absolútna spojitosť normy majú pre ne zmysel, pretože spôsob akým „norma“ $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ generuje priestor $L^{p,\infty}$ je rovnaký (funkcia do neho patrí ak je jeho norma konečná), akým generujú funkčné normy svoje Banachove priestory funkcií. Ďalej budeme pre jednoduchosť písať „normu“ bez úvodzoviek.

Kapitola 2

Distribučná funkcia a nerastúce prerovnanie

V tejto kapitole zadefinujeme *distribučné funkcie* a pomocou nich *nerastúce prerovnanie.* Slovo prerovnanie nám môže dávať zmysel napríklad pre konečné postupnosti, keď prerovnaním myslíme novú postupnosť, ktorá vznikla permutáciou poradia členov pôvodnej postupnosti. Podobný pojem potrebujeme zadefinovať pre funkcie, ktoré sú dané na všeobecnom priestore s mierou. Vytvoríme ho tak, aby distribučná funkcia funkcie po prerovnaní bola zhodná s distribučnou funkciou pôvodnej funkcie. Teda aby funkcie boli *súmerateľné*, pričom súmerateľnosť bude možná aj medzi funkciami definovanými na rôznych priestoroch.

Nech (R, μ) označuje ako v predošlom σ-konečný priestor s úplnou mierou.

Definícia 2.1. Pre funkciu $f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$ definujeme *distribučnú funkciu* funkcie f predpisom:

$$\mu_f(\lambda) := \mu(\{x \in R \,|\, |f(x)| > \lambda\}), \qquad \lambda \in [0, \infty).$$

Distribučná funkcia μ_f popisuje mieru úrovňových množín funkcie f, pričom závisí len na absolútnej hodnote $|f|$ a jej hodnoty môžu zahrňovať aj $+\infty$.

Definícia 2.2. Nech $f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$ a $g \in \mathcal{M}_0(S, \rho)$. Hovoríme, že funkcie f a g sú *súmerateľné*, ak majú rovnakú distribučnú funkciu, čiže ak $\mu_f(\lambda) = \rho_g(\lambda)$ pre všetky $\lambda \geq 0$.

Tvrdenie 2.3. *Predpokladajme, že f, g a f_n, $(n = 1, 2, \dots)$, patria do $\mathcal{M}_0(R, \mu)$ a α je nenulové reálne číslo. Potom distribučná funkcia μ_f je nezáporná, nerastúca, zprava spojitá a ďalej platí*

(i) $|g| \leq |f|$ *μ-s.v.* $\Rightarrow$ $\mu_g \leq \mu_f$;

(ii) $\mu_{\alpha f}(\lambda) = \mu_f\left(\dfrac{\lambda}{|\alpha|}\right)$, *pre* $\lambda \geq 0$;

(iii) $\mu_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1) + \mu_g(\lambda_2)$, *pre* $\lambda_{1,2} \geq 0$;

(iv) $|f| \leq \liminf_{n\to\infty} |f_n|$ *μ-s.v.* $\Rightarrow$ $\mu_f \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_{f_n}$;

špeciálne, $|f_n| \uparrow |f|$ *μ-s.v.* $\Rightarrow$ $|\mu_{f_n}| \uparrow |\mu_f|$.

Príklad 2.4. Bude užitočné vyjadriť si distribučnú funkciu nezápornej jednoduchej funkcie. Nech

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(x),$$

kde E_j sú po dvoch disjunktné podmnožiny R konečnej miery a $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0$. Potom dostávame predpis distribučnej funkcie μ_f funkcie f:

$$\mu_f(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} m_j \chi_{(a_{j+1},a_j)}(x), \qquad \text{kde } m_j = \sum_{i=1}^{j} \mu(E_i)$$

a a_{n+1} je definované ako nula.

Definícia 2.5. Nech $f \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$, potom *nerastúcim prerovnaním* f nazývame funkciu f^* definovanú na $[0,\infty)$ predpisom

$$f^*(t) := \inf\{\lambda > 0, \mu_f(\lambda) \leq t\}, \qquad \text{pre } t \geq 0. \tag{2.1}$$

Poznámka 2.6. Nerastúce prerovnanie f^* je niečo ako „zovšeobecnená inverzia k μ_f“. V prípadoch keď μ_f je ostro klesajúca a spojitá platí $f^* = \mu_f^{-1}$. Funkcia f^* je definovaná na nezáporných reálných číslach, pričom ak je priestor (R,μ) konečný, platí $f^*(t) = 0$ pre všetky $t \geq \mu(R)$. Všimnime si, že ak pre všeobecnú f vytvoríme jej distribučnú funkciu μ_f, a potom vytvoríme ν_{μ_f} distribučnú funkciu k μ_f (ν je klasická Lebesgueova miera), dostaneme presne nerastúce prerovnanie f^*. To je priamym dôsledkom rovnosti

$$f^*(t) = \sup\{\lambda, \mu_f(\lambda) > t\} = \nu_{\mu_f}(t), \qquad \text{pre } t \geq 0, \tag{2.2}$$

ktorá plynie z definície distribučnej funkcie, nerastúceho prerovnania a faktu, že μ_f je nerastúca funkcia.

S nerastúcim prerovnaním sme získali silný nástroj, pretože napriek tomu, že môže byť nerastúce prerovnanie oproti pôvodnej funkcii silne zjednodušené (je definované na nezáporných reálných číslach, kde sa bude pravdepodobne lepšie pracovať ako na všeobecnom priestore (R,μ)), stále nám, ako uvidíme ďalej, poskytuje o pôvodnej funkcii dostatok informácii. Odvoďme si niektoré jeho vlastnosti, ale predtým si uveďme dva príklady.

Príklady 2.7. (a) Vyjadrime si tvar nerastúceho prerovnania jednoduchej funkcie f z Príkladu 2.4. Podľa (2.1) a tvaru funkcie f môžme vidieť, že $f^*(t) = 0$ ak $t \geq m_n$. Ďalej, ak $m_n > t \geq m_{n-1}$, potom $f^*(t) = a_n$, ak $m_{n-1} > t \geq m_{n-2}$, potom $f^*(t) = a_{n-1}$, a tak ďalej. Podľa toho máme

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{[m_{j-1},m_j)}(t), \qquad \text{pre } t \geq 0,$$

kde $m_0 = 0$. V tomto prípade sme si funkciu vyjadrili pomocou „zvyslých blokov“.

(b) Niekedy je užitočnejšie rozdeliť funkciu na „vodorovné bloky“ namiesto zvislých. Takže jednoduchú funkciu z príkladu 2.4. môžme zapísať v tvare

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{F_k}(x), \tag{2.3}$$

kde koeficienty b_k sú kladné a množiny F_k majú konečnú mieru a vytvárajú postupnosť $F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n$. Porovnanie s Príkladom 2.4. ukazuje, že

$$b_k = a_k - a_{k+1}, \qquad F_k = \bigcup_{j=1}^{k} E_j, \qquad \text{pre } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Takže vyjadrením dostaneme

$$f^* = \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{[0,\mu(f_k))}. \tag{2.4}$$

Tvrdenie 2.7. *Predpokladajme, že f, g a f_n, $(n = 1, 2, \ldots)$, patria do $\mathcal{M}_0(R, \mu)$ a a je ľubovoľné reálne číslo. Nerastúce prerovnanie f^* je nezáporná, nerastúca, zprava spojitá funkcia na $[0, \infty)$. Ďalej platí*

(*i*) $|g| \leq |f|$ *μ-s.v.* $\Rightarrow$ $g^* \leq f^*$;

(*ii*) $(af)^* = |a| f^*$;

(*iii*) $(f+g)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2)$, *pre* $t_{1,2} \geq 0$;

(*iv*) $|f| \leq \liminf_{n\to\infty} |f_n|$ *μ-s.v.* $\Rightarrow$ $f^* \leq \liminf_{n\to\infty} f_n^*$

špeciálne, $|f_n| \uparrow |f|$ *μ-s.v.* $\Rightarrow$ $f_n^* \uparrow f^*$;

(*v*) $f^*(\mu_f(\lambda)) \leq \lambda$, *pre* $\mu_f(\lambda) < \infty$;

(*vi*) $\mu_f(f^*(t)) \leq t$, *pre* $f^*(t) < \infty$;

(*vii*) f *a* f^* *sú súmerateľné;*

(*viii*) $(|f|^p)^* = (f^*)^p$, *pre* $p \in (0, \infty)$.

Poznámka 2.8. Keďže podľa predchádzajúceho tvrdenia je funkcia f súmerateľná so svojím nerastúcim prerovaním f^*, bude $f \in L^{p,\infty}(R, \mu)$ práve vtedy, ak bude $f^* \in L^{p,\infty}([0, \infty), \nu)$. Tento fakt plynie priamo z definície slabých Lebesgueho priestorov.

Kapitola 3

Hardyova-Littlewoodova nerovnosť

V tejto kapitole si uvedieme nerovnosť, ktorá je výsledkom práce G. H. Hardyho a J. E. Littlewooda. Táto integrálna nerovnosť popisuje základný vzťah medzi súčinmi funkcií a súčinmi ich nerastúcich prerovnaní, a preto sa nám v ďalšej časti určite zíde. Táto nerovnosť je zovšeobecnením elementárnej nerovnosti

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \leq \sum_{j=1}^{n} a_j^* b_j^*,$$

kde $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ sú konečné postupnosti nezáporných reálnych čísel a $\{a_j^*\}_{j=1}^n$ je postupnosť prvkov a_j usporiadaných zostupne (podobne $\{b_j^*\}_{j=1}^n$). Inými slovami, suma nadobudne svoje maximum ak sú obe postupnosti usporiadané zostupne. Začnime pomocným tvrdením.

Lemma 3.1. *Nech g je nezáporná jednoduchá funkcia na (R, μ) a nech E je ľubovoľná μ-merateľná podmnožina R. Potom*

$$\int_E g \, d\mu \leq \int_0^{\mu(E)} g^*(s) \, ds. \tag{3.1}$$

Veta 3.2 (Hardy & Littlewood) *Nech f a g patria do $\mathcal{M}_0(R, \mu)$, potom*

$$\int_R |fg| \, d\mu \leq \int_0^{\infty} f^*(s) g^*(s) \, ds. \tag{3.2}$$

Pri integrovaní sa nám môže stať, že nebudeme potrebovať integrovať cez celý priestor, a tak si uveďme ešte tvrdenie, v ktorom sa integruje na množine konečnej miery. Tým získame tvar, ktorý neskôr použijeme. Dôkaz získame jednoduchou modifikáciou pôvodného dôkazu.

Tvrdenie 3.3 *Nech f a g patria do $\mathcal{M}_0(R, \mu)$ a A je podmnožina R tak, že $\mu(A) < a$ pre nejaké kladné reálne číslo a. Potom*

$$\int_A |fg| \, d\mu \leq \int_0^{a} f^*(s) g^*(s) \, ds. \tag{3.3}$$

Dôkaz. Keďže f^* a g^* závisia len na absolútnych hodnotách f a g, stačí tvrdenie dokázať pre nezáporné funkcie f a g. Dokonca, stačí dokazovať pre f

a g jednoduché, pretože potom stačí použiť vlastnosť (iv) z Tvrdenia 2.7. a Leviho vetu. Takže v tomto prípade, môžme písať

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{E_j}(x),$$

kde $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_m$ a $a_j > 0$, pre $j = 1, 2, \ldots, m$ (ako v 2.3). Takže podľa 2.4 platí

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{[0,\mu(E_j))}(t).$$

A nakoniec podľa Lemmy 3.1. máme

$$\begin{aligned}
\int_A |fg|\, d\mu &= \sum_{j=1}^{m} a_j \int_{E_j \cap A} g\, d\mu \le \sum_{j=1}^{m} a_j \int_0^{\mu(E_j \cap A)} g^*(s)\, ds \\
&= \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{[0,\mu(E_j \cap A))}(s) g^*(s)\, ds \\
&= \int_0^{a} \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{[0,\mu(E_j \cap A))}(s) g^*(s)\, ds \\
&\le \int_0^{a} \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{[0,\mu(E_j))}(s) g^*(s)\, ds = \int_0^{a} f^*(s) g^*(s)\, ds. \qquad \square
\end{aligned}$$

Dôkaz tohto tvrdenia je jednoduchou modifikáciou dôkazu Hardyovej-Littlewoodovej nerovnosti, ktorý je uvedený v Bennett, Sharpley [1].

Poznámka 3.4. Ďalším okamžitým dôsledkom Hardyovej-Littlewoodovej nerovnosti je

$$\int_A |f\tilde{g}|\, d\mu \le \int_0^{a} f^*(s) g^*(s)\, ds, \tag{3.4}$$

pre každú funkciu $\tilde{g}$ definovanú na A súmerateľnú s g.

Kapitola 4

Charakterizácia funkcií s absolútne spojitou normou na slabom Lebesgueovom priestore

Tak ako to už býva, niektoré definície sú krajne nepraktické. Vlastnosť absolútnej spojitosti normy je medzi nimi, čo je motiváciou na vznik nejakej jednoduchšej charakterizácie, pomocou ktorej by sme mohli rozhodnúť, či daná funkcia má alebo nemá absolútne spojitú normu. Ako vhodný nástroj sa nám ponúka nerastúce prerovnanie, ktoré zachováva mieru úrovňových množín, ale pracuje sa s ním o mnoho jednoduchšie. Podľa definície (1.7.) máme overiť, že pre každú postupnosť množín $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($E_n \subset R$, pre všetky n) spĺňajúcu $E_n \to \emptyset$ μ-s.v. platí $\|f\chi_{E_n}\|_{p,\infty} \to 0$. Ak číselná postupnosť $\mu(E_n)$ konverguje k nule môže byť problémom, ak hodnoty funkcie f na E_n dosahujú „rýchlo“ vysoké hodnoty, čiže nás zaujíma okolie nuly nerastúceho prerovnania f^*. Lenže $E_n \to \emptyset$ μ-s.v. nemusí vždy znamenať, že miera členov tejto postupnosti konverguje k nule. Túto podmienku spĺňa napríklad aj postupnosť množín, ktorej prvky tvoria doplnok k nejakej guli, ktorej polomer rastie. Tento popis slúži len pre predstavu, pretože vo všeobecnom priestore s mierou (R,μ) vôbec nemusíme mať k dispozíciu metriku, a teda hovoriť o nejakej guli a dokonca jej polomere nemusí mať zmysel. Predstava je však jasná a z nej je zrejmé, že nás na nerastúcom prerovnaní f^* bude zaujímať okolie nekonečná. Ďalšou dobrou myšlienkou je, že pre daný priestor $L^{p,\infty}$ je funkcia s nerastúcim prerovnaním $f^*(x) = \frac{1}{x^{1/p}}$ v určitom zmysle hraničnou, pretože pre takúto funkciu sa suprémum v definícii normy $\|\cdot\|_{p,\infty}$ nadobúda všade a je konštantne rovné jednotke. Takže našou hypotézou je, že funkcia f bude mať absolútne spojitú normu práve vtedy, ak na okolí nuly resp. nekonečna bude jej nerastúce prerovnanie rásť pomalšie resp. klesať rýchlejšie alebo v reči Landanových smybolov

$$f^*(x) = o\left(\frac{1}{x^{1/p}}\right), \qquad \text{pre } x \to 0;$$
$$f^*(x) = o\left(\frac{1}{x^{1/p}}\right), \qquad \text{pre } x \to \infty.$$

Poďme si túto hypotézu dokázať. Začneme nutnosťou podmienky.

Veta 4.1. *Nech f je ľubovoľná funkcia z $\mathcal{M}_0(R,\mu) \cap L^{p,\infty}(R,\mu)$ s absolútne spojitou normou. Potom platí*

$$\lim_{t \to 0_+} f^*(t) t^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Dôkaz. Definujme si postupnosť množín $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ takto $E_n := \{x \in R : |f(x)| > n\}$ a pomocou E_n postupnosť $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ nezáporných reálnych čísel tak, že $t_n = \mu(E_n)$. Keďže $f \in L^{p,\infty}$, musí platiť $E_n \to \emptyset$ μ-s.v. a $t_n \to 0$. Poďme dokazovať:

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty} \|f\chi_{E_n}\|_{L^{p,\infty}} && (4.1a)\\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{0<\lambda<\infty} \lambda\mu(\{|f\chi_{E_n}| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} && (4.1b)\\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{0<\lambda<\infty} \lambda\nu(\{f^*\chi_{(0,t_n)} > \lambda\})^{\frac{1}{p}} && (4.1c)\\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{n<\lambda<\infty} \lambda\nu(\{f^*\chi_{(0,t_n)} > \lambda\})^{\frac{1}{p}} && (4.1d)\\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{n<\lambda<\infty} \lambda\nu(\{f^* > \lambda\})^{\frac{1}{p}}. && (4.1e)
\end{aligned}
$$

Vysvetlime si jednotlivé kroky podrobnejšie:

(4.1a) Keďže f má absolútne spojitú normu, podľa definície $E_n \to \emptyset$ μ-s.v. rovnosť platí.

(4.1b) Rozpísali sme si definíciu normy $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$.

(4.1c) V tomto kroku sme prešli ku klasickej Lebesgueovej miere ν a k nerastúcemu prerovnaniu f^*. Pričom rovnosť nastáva, pretože

- (4.1ca) pre všetky $\lambda \le n$ sa oba výrazy v supréme rovnajú $\lambda\mu(E_n)^{\frac{1}{p}}$
- (4.1cb) a pre všetky $\lambda > n$ sa rovnajú $\lambda\mu(\{|f| > \lambda\})^{\frac{1}{p}}$.

(4.1d) Podľa (4.1ca) je pre všetky $\lambda \le n$ výraz $\nu(\{f^*\chi_{(0,t_n)} > \lambda\})^{\frac{1}{p}}$ konštantný, a teda celý výraz v supréme rastie spolu s λ. Tým pádom takýmto zmenšením definičného oboru supréma sa jeho hodnota nezmení.

(4.1e) Vieme, že $\lambda > n$. Nech $x \in \{f^* > \lambda\}$, potom $\chi_{(0,t_n)}(x) = 1$, a teda $x \in \{f^*\chi_{(0,t_n)} > \lambda\}$. Opačná inklúzia je zrejmá. Takže miery spomínaných množín sa rovnajú.

Označme $t_\lambda := \nu(\{f^* > \lambda\})$ a pokračujme

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sup_{n<\lambda<\infty} \lambda\nu(\{f^* > \lambda\})^{\frac{1}{p}} &= \lim_{n\to\infty} \sup_{n<\lambda<\infty} \lambda t_\lambda^{\frac{1}{p}} && (4.1f)\\
&\ge \lim_{n\to\infty} \sup_{n<\lambda<\infty} f^*(t_\lambda) t_\lambda^{\frac{1}{p}} && (4.1g)\\
&= \limsup_{\lambda\to\infty} f^*(t_\lambda) t_\lambda^{\frac{1}{p}}. && (4.1h)
\end{aligned}
$$

(4.1f) Využili sme práve zavedené označenie.

(4.1g) Funkcia f^* je nerastúca a zprava spojitá, takže nerovnosť $f^*(t_\lambda) \le \lambda$.

(4.1h) Definícia limes superior.

Zistili sme, že $\limsup_{\lambda\to\infty} f^*(t_\lambda)t_\lambda^{\frac{1}{p}}$ je zhora ohraničený nulou. Lenže limes inferior z toho istého výrazu je nezáporný, keďže samotný výraz je vždy nezáporný. Takže tieto dve hodnoty sú obe rovné nule a dostávame existenciu limity, ktorá je pochopiteľne tiež rovná nule.

V poslednom kroku už len prevedieme substitúciu a získame dokazované tvrdenie:

$$0 = \lim_{\lambda \to \infty} f^*(t_\lambda) t_\lambda^{\frac{1}{p}} = \lim_{t_\lambda \to 0_+} f^*(t_\lambda) t_\lambda^{\frac{1}{p}}. \qquad \square$$

Veta 4.2. *Nech f je ľubovoľná funkcia z $\mathcal{M}_0(R,\mu) \cap L^{p,\infty}(R,\mu)$ s absolútne spojitou normou. Potom platí*

$$\lim_{t \to \infty} f^*(t) t^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Dôkaz. Definujme si postupnosť množín $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ takto $E_n := \{x \in R : |f(x)| < 1/n\}$. Keďže $f \in L^{p,\infty}$, platí $E_n \to \emptyset$ μ-s.v. Ďalej definujme postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ nezáporných reálnych čísel tak, že $s_n = \mu(|f| \geq 1/n)$. Táto postupnosť je neklesajúca, pretože $\mu(|f| \geq 1/n) = \nu(f^* \geq 1/n)$ a f^* je nerastúca. Ak by bola ohraničená, bola by f^* od nejakého bodu nulová, a teda by tvrdenie platilo triviálne. Nech naopak nie je ohraničená. Poďme dokazovať:

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n \to \infty} ||f\chi_{E_n}||_{L^{p,\infty}} && (4.2a)\\
&= \lim_{n \to \infty} \sup_{0<\lambda<\infty} \lambda \mu(\{|f\chi_{E_n}| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} && (4.2b)\\
&= \lim_{n \to \infty} \sup_{0<\lambda<\infty} \lambda \nu(\{f^*\chi_{(s_n,\infty)} > \lambda\})^{\frac{1}{p}} && (4.2c)\\
&= \lim_{n \to \infty} \sup_{0<\lambda<\frac{1}{n}} \lambda \nu(\{f^*\chi_{(s_n,\infty)} > \lambda\})^{\frac{1}{p}} && (4.2d)\\
&= \limsup_{\lambda \to 0_+} \lambda \nu(\{f^*\chi_{(s_n,\infty)} > \lambda\})^{\frac{1}{p}}. && (4.2e)
\end{aligned}$$

Vysvetlime si jednotlivé kroky:

(4.2*a*) Podobne ako v predošlom dôkaze využívame predpoklad, ktorý nám spolu s $E_n \to \emptyset$ μ-s.v. dáva rovnosť.

(4.2*b*) Rozpísali sme si definíciu normy $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$.

(4.2*c*) V tomto kroku sme vykonali prechod k nerastúcemu prerovnaniu f^*. Pričom rovnosť nastáva, pretože:

- (4.2*ca*) Pre všetky $\lambda \geq 1/n$ sú množiny $\{f^*\chi_{(s_n,\infty)} > \lambda\}$ a $\{|f\chi_{E_n}| > \lambda\}$ prázdne.
- (4.2*cb*) Pre $\lambda < 1/n$ je to zložitejšie. Množina $\{|f\chi_{E_n}| > \lambda\}$ je množina prvkov x priestoru R, pre ktoré platí $\lambda < |f(x)| < 1/n$. Množina $\{f^*\chi_{(s_n,\infty)} > \lambda\}$ je množina nezáporných reálnych čísel y takých, že $\lambda < f^*(y) < f^*(s_n)$. Vieme, že f a f^* sú súmerateľné, a teda rozdiel veľkostí týchto množín, v príslušných mierach je $\nu(\{f^*(s_n) < f^* < 1/n\})$. Lenže s_n sme si definovali tak aby platilo $s_n = \mu(|f| \geq 1/n) = \nu(f^* \geq 1/n)$, a teda $\nu(\{f^*(s_n) < f^* < 1/n\}) = 0$.

(4.2d) Ako sme videli v (4.2ca), na množine $\{\lambda \geq 1/n\}$ je výraz v supréme, ktorý je vždy nezáporný, nulový, a teda vypustením tejto množiny z definičného oboru supréma sa hodnota supréma nezmení.
(4.2e) Definícia limes superior.

Podobne ako v predošlom dôkaze nám z toho, že limes superior z nezáporného výrazu je nekladné číslo vyplýva, že limita existuje a je nulová. Pokračujme

$$0 = \lim_{\lambda \to 0_+} \lambda \nu(\{f^* \chi_{(s_n, \infty)} > \lambda\})^{\frac{1}{p}} = \lim_{\lambda \to 0_+} \lambda \nu(\{f^* > \lambda\})^{\frac{1}{p}}.$$

Poslednú rovnosť si dokážme osobitne. Odhadnime rozdiel výrazov vo vnúri limít

$$\begin{aligned} &|\lambda \nu(\{f^* \chi_{(s_n, \infty)} > \lambda\})^{\frac{1}{p}} - \lambda \nu(\{f^* > \lambda\})^{\frac{1}{p}}| = \\ &\qquad = \lambda |\nu(\{f^* \chi_{(s_n, \infty)} > \lambda\})^{\frac{1}{p}} - \nu(\{f^* > \lambda\})^{\frac{1}{p}}| = \lambda s_n \to 0, \end{aligned}$$

pre λ idúce k 0 zprava.

Rovnosť platí a môžme pokračovať

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \to 0_+} \lambda \nu(\{f^* > \lambda\})^{\frac{1}{p}} &= \lim_{\lambda \to 0_+} \lambda t_\lambda^{\frac{1}{p}} && (4.2f) \\ &\geq \lim_{\lambda \to 0_+} f^*(t_\lambda) t_\lambda^{\frac{1}{p}} && (4.2g) \\ &= \lim_{t_\lambda \to \infty} f^*(t_\lambda) t_\lambda^{\frac{1}{p}}. && (4.2h) \end{aligned}$$

(4.2f) Značenie z predošlého dôkazu.
(4.2g) Analogicky ako v minulom dôkaze, keďže funkcia f^* je nerastúca a zprava spojitá, platí nerovnosť $f^*(t_\lambda) \leq \lambda$
(4.2h) A na záver substitúcia v argumente limity. $\square$

Postačujúcosť podmienky je trochu zložitejšia, a tak si najprv dokážeme, že z platností limít plynie, že f^* má absolútne spojitú normu a odtiaľ potom, že to isté platí aj pre f.

Veta 4.3. *Nech f je ľubovoľná funkcia z $\mathcal{M}_0(R, \mu) \cap L^{p,\infty}(R, \mu)$ a nech platia limity*

$$\lim_{t \to 0_+} f^*(t) t^{\frac{1}{p}} = 0 \quad a \quad \lim_{t \to \infty} f^*(t) t^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Potom má nerastúce prerovnanie f^* absolútne spojitú normu.

Dôkaz. Nech E_n je ľubovoľná postupnosť množín taká, že $E_n \to \emptyset$ ν-s.v. Zvoľme $\varepsilon > 0$ ľubovoľné a ukážme, že $||f^* \chi_{E_n}||_{L^{p,\infty}} < \varepsilon$ pre n dostatočne veľké.

Podľa predpokladov vieme, že

$$\exists\delta_1 > 0 : f^*(t)t^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{pre } t \in (0, \delta_1);$$
$$\exists\delta_2 > 0 : f^*(t)t^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{pre } t \in (\delta_2, \infty).$$

Bez ujmy na všeobecnosti (BUNV) predpokladajme, že $\delta_1 < \delta_2$. Poďme odhadovať

$$\|f^*\chi_{E_n}\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{0<\lambda<\infty} \lambda\nu(\{f^*\chi_{E_n} > \lambda\})^{\frac{1}{p}} =$$
$$= \max\{\sup_{f^*(\delta_1)<\lambda<\infty} \lambda\nu(\{f^*\chi_{E_n} > \lambda\})^{\frac{1}{p}}, \sup_{f^*(\delta_2)\le\lambda\le f^*(\delta_1)} \cdots, \sup_{0<\lambda<f^*(\delta_2)} \cdots\}.$$

Použili sme definíciu normy $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ a definičný obor supréma sme si rozdelili na tri oblasti. Ak bude suprémum cez každú z týchto troch množín ohraničené ε potom aj suprémum cez ich zjednotenie bude ohraničené ε a dostaneme to čo sme chceli dokázať.

1. $\lambda \in (f^*(\delta_1), \infty)$: Platí

$$\sup_{f^*(\delta_1)<\lambda<\infty} \lambda\nu(\{f^*\chi_{E_n} > \lambda\})^{\frac{1}{p}} \le \sup_{f^*(\delta_1)<\lambda<\infty} \lambda\nu(\{f^* > \lambda\})^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Prvá nerovnosť je jednoduchá, ale vysvetlime si podrobnejšie druhú nerovnosť. Zafixujme λ. Ak existuje t tak, že $f^*(t) = \lambda$ potom je $t < \delta_1$, a platí

$$\lambda\nu(\{f^* > \lambda\})^{\frac{1}{p}} = f^*(t)t^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pri prechode k suprému sa nám síce ostrá nerovnosť môze zmeniť na neostrú, ale to nevadí, pretože $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Nech naopak také t neexistuje (ide o „schod“). Označme

$$\hat{t} := \sup\{t, f^*(t) > \lambda\}$$
$$\hat{\lambda} := \lim_{t\to\hat{t}_-} f^*(t).$$

Z vlastností nerastúceho prerovnania máme $\hat{\lambda} \ge \lambda$ a $\hat{t} \le \delta_1$, a teda

$$\lambda\nu(\{f^* > \lambda\})^{\frac{1}{p}} = \lambda\hat{t}^{\frac{1}{p}} \le \hat{\lambda}\hat{t}^{\frac{1}{p}} = \lim_{t\to\hat{t}_-} f^*(t)t^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Posledná nerovnosť naozaj platí, pretože ak sa limitne blížim k $\hat{t}$ zľava je $t < \hat{t} \le \delta_1$, a teda výraz v limite je vždy menší ako $\frac{\varepsilon}{2}$. Limitným prechodom dostanem opäť neostrú nerovnosť, ale podobne ako vyššie už len použijem, že $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

2. $\lambda \in (0, f^*(\delta_2))$: Pokračujme druhou oblasťou

$$\sup_{0<\lambda<f^*(\delta_2)} \lambda\nu(\{f^*\chi_{E_n} > \lambda\})^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{0<\lambda<f^*(\delta_2)} \lambda\nu(\{f^* > \lambda\})^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Postupujeme podobne ako v predchádzajúcom prípade. Ak existuje t tak, že $f^*(t) = \lambda$ potom je $t > \delta_2$, a platí

$$\lambda\nu(\{f^* > \lambda\})^{\frac{1}{p}} = f^*(t)t^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Prechodom k suprému dostanem neostrú nerovnosť a $\frac{\varepsilon}{2}$ odhadneme ε. Nech naopak také t neexistuje (opäť ide o „schod"). Označme

$$\begin{aligned} \tilde{t} &:= \sup\{t, f^*(t) > \lambda\} \\ \tilde{\lambda} &:= \lim_{t \to \hat{t}_-} f^*(t). \end{aligned}$$

Z vlastností nerastúceho prerovnania máme $f^*(\delta_2) > \tilde{\lambda} \geq \lambda$ a $\tilde{t} > \delta_2$, a teda

$$\lambda\nu(\{f^* > \lambda\})^{\frac{1}{p}} = \lambda\tilde{t}^{\frac{1}{p}} \leq \tilde{\lambda}\tilde{t}^{\frac{1}{p}} = \lim_{t \to \tilde{t}_-} f^*(t)t^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Pretože pre t dostatočne blízko $\tilde{t}$ je $t > \delta_2$, a teda $f^*(t)t^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}$.

3. $\lambda \in [f^*(\delta_2), f^*(\delta_1)]$: V tejto množine už nemáme problém so žiadnou „singularitou", a tak tvrdenie už nie je ťažké dokázať. Pozrime sa na to:

$$\sup_{f^*(\delta_2)\leq\lambda\leq f^*(\delta_1)} \lambda\nu(\{f^*\chi_{E_n} > \lambda\})^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{f^*(\delta_2)\leq\lambda\leq f^*(\delta_1)} f^*(\delta_1)\nu(\{f^*\chi_{E_n} > \lambda\})^{\frac{1}{p}}.$$

V tomto kroku sme odhadli λ najväčšou možnou hodnotou. V ďalšom kroku využijeme jednu zo základných vlastností miery, ktorú si tu pre kompletnosť uvedieme.

Tvrdenie 4.4. (vetička z miery) *Nech (X, S, μ) je priestor s mierou. Majme postupnosť množín $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, pričom $A_k \in S$; $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ a $\mu(A_1) < \infty$. Potom platí*

$$\mu\left(\bigcap_k A_k\right) = \lim_k \mu(A_k).$$

V našom prípade budú množiny A_k predstavovať množiny $\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \cap (0, \delta_2)$. Ukážme si, že oba predpoklady vetičky sú splnené

$$\bigcup_{n=k+1}^{\infty} E_n \cap (0, \delta_2) \subset \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \cap (0, \delta_2), \qquad \text{pre všetky } k \in \mathbb{N}$$

$$\text{a} \quad \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cap (0, \delta_2)\right) \leq \nu((0, \delta_2)) < \infty.$$

Keďže $E_n \to \emptyset$ μ-s.v., je zrejmé, že aj $E_n \cap (0, \delta_2) \to \emptyset$ μ-s.v. Použijeme definíciu tejto konvergencie a aplikujeme vetičku

$$0 = \nu(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \cap (0, \delta_2)) = \lim_{k\to\infty} \nu(\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \cap (0, \delta_2)) \geq \lim_{k\to\infty} \nu(E_k \cap (0, \delta_2)).$$

Dokázali sme, že miera množín E_n, ktoré sú podmnožinou množiny konečnej miery, v našom prípade interval $(0, \delta_2)$, konverguje k 0. Takže existuje n_0 tak, že pre všetky $n \geq n_0$ platí

$$\nu(E_n \cap (0, \delta_2)) < \left(\frac{\epsilon}{f^*(\delta_1)}\right)^p.$$

Pokračujme posledným krokom

$$\begin{aligned} \sup_{f^*(\delta_2) \leq \lambda \leq f^*(\delta_1)} & f^*(\delta_1)\nu(\{f^*\chi_{E_n} > \lambda\})^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \leq \sup_{f^*(\delta_2) \leq \lambda \leq f^*(\delta_1)} f^*(\delta_1)\nu(\{f^*\chi_{E_n} > f^*(\delta_2)\})^{\frac{1}{p}} && (4.3a) \\ & = f^*(\delta_1)\nu(\{f^*\chi_{E_n} > f^*(\delta_2)\})^{\frac{1}{p}} && (4.3b) \\ & \leq f^*(\delta_1)\nu(E_n \cap (0, \delta_2))^{\frac{1}{p}} < \epsilon. && (4.3c) \end{aligned}$$

(4.3a) Odhad platí, pretože miera množiny $\{f^*\chi_{E_n} > \lambda\}$ sa so zmenšujúcim sa λ zväčšuje alebo nanajvýš nemení.

(4.3b) Suprémum môžme vynechať, pretože výraz vo vnútri už nezávisí na λ.

(4.3c) Prvá nerovnosť nastáva, pretože ak reálne číslo $x \geq 0$ patrí do množiny $\{f^*\chi_{E_n} > f^*(\delta_2)\}$, potom musí x patriť do E_n a zároveň musí byť $f^*(x) > f^*(\delta_2)$. Keďže f^* je nerastúca funkcia druhá podmienka je ekvivalentná tomu, že x je menšie ako δ_2, a teda dokopy, x patrí do množiny $E_n \cap (0, \delta_2)$. Posledný odhad platí pre všetky $n \geq n_0$.

Zhrnutím všetkých troch krokov dostávame, že pre všetky $n \geq n_0$ je

$$\|f^*\chi_{E_n}\|_{L^{p,\infty}} < \varepsilon. \qquad \square$$

Na záver nás čaká posledný krok, a to uzavretie kruhu implikácii návratom k absolútnej spojitosti funkcie f.

Veta 4.5. *Nech f je ľubovoľná funkcia z $\mathcal{M}_0(R, \mu) \cap L^{p,\infty}(R, \mu)$. Ak má jej nerastúce prerovnanie f^* absolútne spojitú normu, má absolútne spojitú normu aj samotná funkcia f.*

Dôkaz. Vezmime si ľubovoľnú postupnosť množín E_n takú, že $E_n \to \emptyset$ μ-s.v. V prvom kroku si vyrobíme rozklad týchto množín a pomocou tohto rozkladu dokážeme, že $\|f\chi_{E_n}\|_{L^{p,\infty}}$ konverguje k nule.

KONŠTRUKCIA ROZKLADU: Definujme si pomocné úrovňové množiny v priestore (R, μ)

$$H_{(a,b)} := \{x \in R : f^*(b) \leq |f(x)| < f^*(a)\}, \qquad \text{pre } 0 \leq a < b \leq \infty,$$

pričom hodnotami $f^*(0)$ a $f^*(\infty)$ sa myslia limity $\lim_{t\to 0} f^*(t)$ a $\lim_{t\to\infty} f^*(t)$. Platí $\lim_{t\to\infty} f^*(t) = 0$, pretože $f \in L^{p,\infty}$. Všimnime si, že pre všetky $b < \infty$ je $\mu(H_{(a,b)}) < \infty$. Opak by bol v spore s predpokladom $f \in L^{p,\infty}$.

Na množinách konečnej miery splýva konvergencia k prázdnej množine s konvergenciou v miere k nule (Tvrdenie 4.4.). Takže pre všeobecný interval $(k-1, k)$ môžme odhadnúť

$$(\forall \ell \geq k)(\exists n_{k\ell})(\forall n \geq n_{k\ell}) : \ \mu(H_{(k-1,k)} \cap E_n) < \frac{k}{\ell^3}, \tag{4.4a}$$

pričom za $n_{k\ell}$ budeme vždy brať najmenšie vyhovujúce číslo.

Postupnosť $n_{k\ell}$ je v premennej ℓ neklesajúca, pretože $\mu(H_{(k-1,k)} \cap E_n) \to 0$ pre $n \to \infty$. Nech je k pevné. BUNV môžme predpokladať, že $\lim_{\ell\to\infty} n_{k\ell} = \infty$. Inak by muselo platiť $H_{(k-1,k)} \cap E_n = \emptyset$ od nejakého n. V tom prípade by sme každý člen postupnosti $n_{k\ell}$ porovnali s ℓ a ak by bolo ℓ väčšie, tak by sme ním tento člen postupnosti nahradili. Tým by sme získali novú postupnosť $n_{k\ell}$, ktorá by spĺňala nerovnosti (4.4a) a navyše by rástla do nekonečna s rastúcim ℓ.

Definujme $n_\ell := \max\{n_{1\ell}, n_{2\ell}, \ldots, n_{l\ell}\}$. Keďže $\lim_{\ell\to\infty} n_{k\ell} = \infty$ a postupnosť $n_{k\ell}$ je v premennej ℓ neklesajúca, je aj postupnosť n_ℓ neklesajúca a platí $\lim_{\ell\to\infty} n_\ell = \infty$. Ďalej, pre všetky $n \geq n_\ell$ platí

$$\mu(H_{(0,\ell)} \cap E_n) = \sum_{k=1}^{\ell} \mu(H_{(k-1,k)} \cap E_n) < \sum_{k=1}^{\ell} \frac{k}{\ell^3} = \frac{\ell+1}{2\ell^2}. \tag{4.4b}$$

Využili sme len fakt, že miera zjednotenia disjunktných množín je rovná súčtu ich mier a kolekciu nerovností (4.4a).

Vezmime pevné $n \geq n_1$[1] a preň definujme ℓ_n tak, že platí $n_{\ell_n} \leq n < n_{\ell_n+1}$. Keďže n_ℓ tvorí neklesajúcu postupnosť, ℓ_n je dobre definované. Z definície nám vyplýva platnosť limít

$$\lim_{n\to\infty} \ell_n = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{\ell_n\to\infty} n = \infty.$$

Teraz prejdime k samotnej definícii rozkladu množiny E_n

$$\begin{aligned} F_n &:= E_n \cap H_{(0,\ell_n)}, \\ G_n &:= E_n \setminus F_n. \end{aligned}$$

Tento rozklad je už z definície disjunktný a navyše platí

$$\lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = \lim_{\ell_n\to\infty} \mu(F_n) = \lim_{\ell_n\to\infty} \mu(E_n \cap H_{(0,\ell_n)}) < \lim_{\ell_n\to\infty} \frac{\ell_n+1}{2\ell_n^2} = 0.$$

[1] Pre $n < n_1$ nemáme definovaný rozklad, ale ani nám ho netreba, pretože nás zaujímajú len „veľké“ n.

V prvom kroku sme vymenili argument n za ℓ_n. Tento krok je korektný, vďaka tomu, že $n \to \infty$ práve vtedy, keď $\ell_n \to \infty$. To platí vďaka definícii ℓ_n, konkrétne kvôli nerovnostiam $n_{\ell_n} \leq n < n_{\ell_n+1}$. Ďalej sme si rozpísali F_n podľa definície a použili (4.4b).

Množina G_n má tiež peknú vlastnosť. Ak zafixujeme n, každý prvok z G_n bude mimo množiny $H_{(0,\ell_n)}$. To znamená, že hodnoty funkcie f na G_n nepresiahnu $f^*(\ell_n)$. Táto hodnota navyše s rastúcim n klesá k 0, pretože $f \in L^{p,\infty}$. To znamená, že funkcia f konverguje na G_n rovnomerne k nule

$$x \in G_n \Rightarrow x \notin H_{(0,\ell_n)} \Rightarrow \sup_{x\in G_n} |f(x)| < f^*(\ell_n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in G_n} |f(x)| = 0.$$

<u>HLAVNÁ ČASŤ</u>: Zvoľme $\varepsilon > 0$ ľubovoľné. Zafixujme si najprv n, preň máme ℓ_n podľa vyššie uvedenej definície. Rozpíšme si definíciu odhadovaného výrazu

$$\begin{aligned} ||f\chi_{E_n}||_{L^{p,\infty}} &= \sup_{0<\lambda<\infty} \lambda\mu(\{|f\chi_{E_n}| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} \\ &= \max\{ \sup_{0<\lambda<f^*(\ell_n)} \ldots, \sup_{f^*(\ell_n)\leq\lambda<\infty} \ldots\}. \end{aligned}$$

V poslednom kroku sme si rozdelili definičný obor supréma na dve oblasti, pričom v ďalšom slede bude naším cieľom odhadnúť pomocou ε supréma cez obe tieto oblasti. Tieto odhady nám stačí previesť pre dostatočne veľké n.

<u>1. Odhad pre $\lambda \in [f^*(\ell_n), \infty)$</u>: Začnime

$$\begin{aligned} \sup_{f^*(\ell_n)\leq\lambda<\infty} \lambda\mu(\{|f\chi_{E_n}| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} &= \sup_{f^*(\ell_n)\leq\lambda<\infty} \lambda\mu(\{|f\chi_{F_n}| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} && (4.4c) \\ &\leq \sup_{0<\lambda<\infty} \lambda\mu(\{|f\chi_{F_n}| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} && (4.4d) \\ &= \|f\chi_{F_n}\|_{L^{p,\infty}}. && (4.4e) \end{aligned}$$

Vysvetlime si jednotlivé kroky:

(4.4c) Pre $\lambda \in [f^*(\ell_n), \infty)$ sa hodnoty $\mu(\{|f\chi_{E_n}| > \lambda\})$ a $\mu(\{|f\chi_{F_n}| > \lambda\})$ rovnajú, pretože skúmame tie body množiny E_n, v ktorých je hodnota f väčšia ako $f^*(\ell_n)$, a teda tie, ktoré patria množine $H_{(0,\ell_n)}$, čiže aj F_n.

(4.4d) Rozšírením definičného oboru supréma sa jeho hodnota mohla zväčšiť alebo nanajvýš ostať rovnaká.

(4.4e) Použili sme definíciu normy $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$.

V ďalšom využijeme predpoklad $f^* \in (L^{p,\infty})_a$, podľa ktorého existuje $a > 0$ tak, že $\|f\chi_{(0,a)}\|_{L^{p,\infty}} < \varepsilon$. Ďalej keďže $\mu(F_n)$ konverguje k 0, existuje index $\hat{n}$ taký, že pre všetky $n \geq \hat{n}$ je $\mu(F_n) < a$. Teraz môžme pokračovať v odhadovaní

$$\begin{aligned} \|f\chi_{F_n}\|_{L^{p,\infty}} &= \sup_{\|g\|_{(L^{p,\infty})'}\leq 1} \int_{F_n} |fg| \, d\mu \\ &\leq \sup_{\|g\|_{(L^{p,\infty})'}\leq 1} \int_0^a f^*(x)g^*(x) \, dx \\ &= \|f^*\chi_{(0,a)}\|_{L^{p,\infty}} < \varepsilon, \end{aligned}$$

pričom sme použili dvakrát duálne vyjadrenie normy pomocou prvkov z asociovaného priestoru (Poznámky 1.6. a 1.7.) a Hardyovu-Littlewoodovu nerovnosť (3.4). Tým je odhad na prvej oblasti hotový.

2. Odhad pre $\lambda \in (0, f^*(\ell_n))$: Pokračujme druhou oblasťou

$$\sup_{0<\lambda<f^*(\ell_n)} \lambda\mu(\{|f\chi_{E_n}| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} =$$

$$\begin{aligned} &= \sup_{0<\lambda<f^*(\ell_n)} \lambda[\mu(F_n) + \mu(\{|f\chi_{G_n}| > \lambda\})^{\frac{1}{p}}] && (4.4f) \\ &\leq f^*(\ell_n)\mu(F_n) + \sup_{0<\lambda<f^*(\ell_n)} \lambda\mu(\{|f\chi_{G_n}| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} && (4.4g) \\ &= \sup_{0<\lambda<\infty} \lambda\mu(\{|f\chi_{G_n}| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} + f^*(\ell_n)\mu(F_n) && (4.4h) \\ &= \|f\chi_{G_n}\|_{L^{p,\infty}} + f^*(\ell_n)\mu(F_n). && (4.4i) \end{aligned}$$

Opäť si rozoberme jednotlivé kroky:

(4.4f) Množinu $\{|f\chi_{E_n}| > \lambda\}$ sme si rozdelili na dve časti. Tam kde platí $f \geq f^*(\ell_n)$ a kde platí $f < f^*(\ell_n)$. V prvom prípade je zahrnutá celá množina F_n, pretože $\lambda < f^*(\ell_n)$, a teda do množiny $\{|f\chi_{E_n}| > \lambda\}$ automaticky patria všetky body F_n. Pričom zvyšok bude patriť množine G_n.

(4.4g) V jednom zo sčítancov sme odhadli λ pomocou $f^*(\ell_n)$ a vybrali ho von zo supréma. Môžme tak učiniť, pretože sa stal nezávislým na λ.

(4.4h) Rovnosť nastáva, pretože pre všetky $\lambda > f^*(\ell_n)$ platí rovnosť $\mu(\{|f\chi_{G_n}| > \lambda\}) = 0$. Teda pridaním takýchto prípustných hodnôt pre λ sa hodnota supréma nezmení.

(4.4i) Definícia normy $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$.

Druhý člen súčtu odhadneme hodnotou $\frac{\varepsilon}{2}$. Je to hračka, pretože aj $\mu(F_n)$, aj $f^*(l_n)$ konvergujú k 0 pre n idúce do ∞. Prvú konvergenciu sme si ukázali vyššie a druhá plynie z predpokladu $f^* \in L^{p,\infty}$. Takže existuje index $\tilde{n}$ taký, že pre všetky $n \geq \tilde{n}$ je $\mu(F_n)f^*(l_n) < \frac{\varepsilon}{2}$.

A nakoniec

$$\begin{aligned} ||f\chi_{G_n}||_{L^{p,\infty}} &= \sup_{0<\lambda<\infty} \lambda\mu(\{|f\chi_{G_n}| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{0<\lambda<\infty} \lambda\mu(\{f^*(\ell_n) > |f(x)| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} && (4.4j) \\ &= \sup_{0<\lambda<\infty} \lambda\mu(\{f^*\chi_{(\ell_n,\infty)} > \lambda\})^{\frac{1}{p}} && (4.4k) \\ &= \|f^*\chi_{(\ell_n,\infty)}\|_{L^{p,\infty}}, \end{aligned}$$

kde sme znovu použili dvakrát definíciu normy $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ a zvyšné dva kroky si vysvetlíme:

(4.4j) Vieme, že hodnoty funkcie f v bodoch množiny $\{|f\chi_{G_n}| > \lambda\}$ sú v intervale $(\lambda, f^*(\ell_n))$, pretože tak sme si definovali G_n. Takže keď si vezmem všetky body priestoru, ktoré patria do tohto intervalu dostanem množinu s rovnakou alebo väčšou mierou.

(4.4k) V tomto kroku sme použili fakt, že f a f^* sú súmerateľné a nerastúcosť nerastúceho prerovnania f^*.

Na odhad posledného výrazu môžme použiť absolutnú spojitosť normy f^*. Keďže $(\ell_n, \infty) \to \emptyset$ μ-s.v., existuje index $\bar{n}$ taký, že pre všetky $n \geq \bar{n}$ je $||f^* \chi_{(\ell_n,\infty)}||_{L^{p,\infty}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Takže dokopy máme:

$$\sup_{0<\lambda<f^*(\ell_n)} \lambda\mu(|f\chi_{E_n}| > \lambda)^{\frac{1}{p}} = \|f\chi_{G_n}\|_{L^{p,\infty}} + \mu(F_n)f^*(\ell_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

A teda $||f\chi_{E_n}||_{L^{p,\infty}} < \varepsilon$ pre všetky $n \geq \max\{\hat{n}, \tilde{n}, \bar{n}\}$. $\square$

Zhrnutie 4.6. *Nech f je ľubovoľná funkcia z $\mathcal{M}_0(R,\mu) \cap L^{p,\infty}(R,\mu)$, potom funkcia f má absolútne spojitú normu práve vtedy, ak platia limity*

$$\lim_{t\to 0_+} f^*(t)t^{\frac{1}{p}} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} f^*(t)t^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Literatúra

[1] Bennett C., Sharpley R. (1988): Interpolation of operators. Academic Press, Boston.