Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzity Karlovy

KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY

Práce SVOČ

Kmitající Znaménkové míry

Miroslav Kolář

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc.

Studijní program: Obecná matematika, Matematická analýza
Teorie funkcí a funkčních prostorů
Praha 2009

Úvod

Pojem kmitající znaménkové míry se patrně poprvé objevil v souvislosti se zkoumáním hlubších problémů Choquetovy teorie, viz články [5] a [6]. Při trochu jiném úhlu pohledu lze kmitající znaménkové míry chápat jako zobecnění známých nikde monotónních reálných funkcí. Cílem této práce bylo ukázat, že při tomto zobecnění se platnost některých známých vlastností nikde monotónních funkcí zachovává i pro míry.

Je například dobře známo, že nikde monotónní funkce jsou 2.kategorie v prostoru spojitých funkcí (všechny spojité funkce bez derivace jsou nikde monotónní). V článku [6] je dokázáno, že kmitající znaménkové míry jsou 2.kategorie v Banachově prostoru Radonových měr na kompaktním metrickém prostoru X bez izolovaných bodů, které splňují podmínku $\mu(X) = 0$. Ve větě 2.2 tento výsledek rozšíříme na celý systém uzavřených podprostorů prostoru Radonových měr na X a tvrzení z [6] dostaneme jako jeden ze zajímavých důsledků (k tomu poznamenejme, že v [6] je použita trochu jiná definice nikde monotónní míry)

Na začátku 20.století byla také dokázána existence nikde monotónních funkcí, které mají vlastní derivaci v každém bodě, tzv. Köpckeho funkcí. Tvrzení 2.11 ukazuje, že také v $\mathbb{R}^m$ existují kmitající znaménkové míry, které mají derivaci podle Lebesgueovy míry v každém bodě, tedy jakési vícerozměrné analogie Köpckeho funkcí.

Kapitola 1

Nikde monotónní funkce

Reálná funkce f se nazývá *nikde monotónní*, pokud není monotónní na žádném intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Nikde monotónní jsou třeba funkce, které nemají v žádném bodě vlastní derivaci. V této kapitole ukážeme, že i na první pohled "pěkné"funkce mohou být nikde monotónní.

Každá funkce s konečnou variací je součtem dvou monotónních funkcí a má vlastní derivaci skoro všude. Přesto existují funkce s konečnou variací, které nejsou monotónní na žádném intervalu. Ve druhé kapitole uvidíme, že takových funkcí je navíc velmi mnoho (ve smyslu kategorií). Dokážeme také existenci nikde monotónních funkcí, které mají vlastní derivaci dokonce v každém bodě.

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *Pompeiuova funkce*, má-li na $\mathbb{R}$ omezenou derivaci f' a množiny $\{f' = 0\}$, $\{f' > 0\}$, jsou husté v $\mathbb{R}$.

Řekneme, že funkce f je *Köpckeho funkce*, je-li Pompeiuova a množiny $\{f' > 0\}$, $\{f' < 0\}$, jsou husté v $\mathbb{R}$.

Köpckeho funkce jsou tedy nikde monotónní funkce, které mají v každém bodě derivaci. Ve větě 1.2 popíšeme nepřímý důkaz jejich existence podle C.E.Weila.

Lemma 1.1 *Existuje nekonstantní funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která má v každém bodě vlastní derivaci a množina $\{f' = 0\}$ je hustá v $\mathbb{R}$.*

Důkaz: Seřaďme čísla z $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$ do posloupnosti $\{q_n\}$. Položíme

$$G(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sqrt[3]{x - q_n}}{2^n}, \ x \in (0, 1)$$

Součet pro $G(x)$ konverguje lokálně stejnoměrně, takže G je spojitá rostoucí funkce na (0,1). Pro dané $h \neq 0$ je

$$\frac{G(x+h)-G(x)}{h} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sqrt[3]{x+h-q_n} - \sqrt[3]{x-q_n}}{2^n \cdot h} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n \cdot \varphi_h^n(x)},$$

kde $\varphi_h^n(x) = (\sqrt[3]{x+h-q_n})^2 + \sqrt[3]{x+h-q_n} \cdot \sqrt[3]{x-q_n} + (\sqrt[3]{x-q_n})^2$. Tedy

$$\lim_{h\to 0} \frac{G(x+h)-G(x)}{h} > 0 \text{ pro každé } x \text{ a } \lim_{h\to 0} \frac{G(x+h)-G(x)}{h} = \infty \text{ pro } x \in \mathbb{Q}.$$

(limita vždy existuje, neboť jednotlivé sčítance jsou nezáporné) Označíme-li F inverzní funkci ke G, je $F'(y) = 0$ pro každé $y \in \mathbb{Q}$ a přitom F' není identicky nulová (F je rostoucí). Funkce $f(x) = F(\frac{\operatorname{arctg}(x)}{\pi} + \frac{1}{2})$ má požadované vlastnosti.

$\square$

Poznámka Mírnou modifikací konstrukce popsané v předchozím lemmatu lze zařídit, aby sestrojená funkce měla omezenou derivaci. Lze toho docílit například tak, že za první dvě q_n zvolíme čísla $1/4$ a $3/4$. Potom příslušná suma pro derivaci funkce G bude všude na $(0,1)$ odražena od nuly kladnou konstantou, takže derivace F (a tudíž i derivace f) bude omezená.

Nechť X je prostor všech omezených reálných funkcí, které mají primitivní funkci na $\mathbb{R}$ a pro každou $f \in X$ je $\{f = 0\}$ hustá v $\mathbb{R}$. Podle předchozího lemmatu X obsahuje i nenulové funkce. Jelikož každá derivace je funkcí 1. Baireovy třídy, je $\{f = 0\}$ typu G_δ pro každou $f \in X$. Z toho plyne, že X je lineární prostor; jsou-li $f_1, f_2 \in X$, platí $\{f_1 + f_2 = 0\} \supset (\{f_1 = 0\} \cap \{f_2 = 0\})$, přičemž množina vpravo je G_δ a hustá, neboť obě množiny $\{f_1 = 0\}$ a $\{f_2 = 0\}$) jsou G_δ a husté, a $\mathbb{R}$ je Baireův prostor. S normou $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ tvoří X dokonce Banachův prostor. Je-li totiž $\{f_n\} \subset X$ cauchyovská, pak $f_n \to f$ stejnoměrně, kde f je omezená funkce. Přitom f má primitivní funkci (stejnoměrná limita derivací je derivace) a množina $\{f = 0\}$ je hustá v $\mathbb{R}$, protože $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{f_n = 0\} \subset \{f = 0\}$ a $\{f_n = 0\}$ jsou G_δ a husté. Nyní již přikročíme k samotnému důkazu existence Köpckeho funkce.

Věta 1.2 (Weil)
Nechť $E = \{f \in X \mid \textit{existuje } (a,b) \subset \mathbb{R} \textit{ takový, že } f \textit{ je monotónní na } (a,b)\}$. *Potom* E *je 1.kategorie v* X.

Důkaz: Nechť $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je systém všech otevřených intervalů s racionálními konci. Označíme $E_n^+ = \{f \in X \mid f \geq 0 \text{ na } I_n\}$, $E_n^- = \{f \in X \mid f \leq 0 \text{ na } I_n\}$. Množiny E_n^+ a E_n^- jsou určitě uzavřené, ukážeme, že jsou řídké. K tomu zvolme $f \in E_n^+$ a $\varepsilon > 0$. Nechť $x \in I_n, f(x) = 0$. S využitím Lemma 1.1 a vhodné lineární transformace nalezneme funkci $g \in X$, $\|g\| < \varepsilon$, $g(x) < 0$. Potom $f + g \in X$, $\|(f+g) - f\| = \|g\| < \varepsilon$ a $f + g \notin E_n^+$. Množina E_n^+ má tedy prázdný vnitřek, a je tudíž řídká. Analogicky se ukáže, že i E_n^- je řídká. Protože $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n^+ \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n^-$, je E 1. kategorie v X.

$\square$

Protože X je úplný metrický prostor, je 2.kategorie podle Baireovy věty, takže $X \setminus E$ je neprázdná. Tak dostáváme

Důsledek 1.3 *Existuje Köpckeho funkce na* $\mathbb{R}$.

Köpckeho funkce lze také sestrojit přímo z Pompeiuových funkcí; o tom se lze dočíst v [1] nebo [2].

Kapitola 2

Kmitající znaménkové míry

2.1 Definice a existence

Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův prostor. Řekneme, že míra μ na X je Radonova, jestliže

- borelovské množiny jsou μ-měřitelné,
- pro každou $K \subset X$ kompaktní je $\mu(K) < \infty$,
- $\mu(G) = \sup\{\mu(K) : K \subset G, K \text{ kompaktní}\}$ pro každou $G \subset X$ otevřenou,
- $\mu(E) = \inf\{\mu(G) : G \subset X \text{ otevřená}\}$ pro každou $E \subset X$ μ-měřitelnou.

Je-li μ znaménková míra, označíme μ^+, resp. μ^-, její kladnou, resp. zápornou variaci. Totální variaci μ označíme $|\mu|$. Znaménková míra na X je Radonova, jsou-li její kladná a záporná variace konečné Radonovy míry. Symbolem $\mathcal{M}(X)$ označíme Banachův prostor všech znaménkových Radonových měr na X s normou $\|\mu\| = |\mu|(X)$. Prvky tohoto prostoru lze chápat jako třídy ekvivalence, kde $\mu \sim \nu$ právě když $\mu = \nu$ na borelovských množinách (potom se rovnají na průniku svých definičních oborů). Prostor $\mathcal{M}(X)$ je duálním prostorem k prostoru $\mathcal{C}_0(X)$ všech spojitých funkcí na X takových, že pro každé $\varepsilon > 0$ je $|f| < \varepsilon$ mimo jistou kompaktní množinu $K_\varepsilon \subset X$ (prostor spojitých funkcí, které se "anulují v nekonečnu").

Představme si, že máme funkci $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, která je nikde monotónní a má na [0,1] konečnou variaci. Takovou funkci můžeme standartním způsobem ztotožnit s jistou znaménkovou Radonovou mírou μ na [0,1]. Přitom μ musí splňovat podmínku $\mu^+(a,b) > 0$, $\mu^-(a,b) > 0$ pro každý $(a,b) \subset [0,1]$. To vede k definici kmitající znaménkové míry v obecnější situaci:

Znaménkovou míru $\mu \in \mathcal{M}(X)$ nazveme *kmitající*, jestliže pro každou neprázdnou $G \subset X$ otevřenou je $\mu^+(G) > 0$ a $\mu^-(G) > 0$. Množinu všech kmitajících znaménkových měr na X označíme $\mathcal{K}(X)$.

Sestrojit kmitající znaménkovou míru např. na $\mathbb{R}^m$ není obtížné; jsou-li $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ dvě disjunktní spočetné husté množiny, položíme $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \cdot \delta_{a_n} - \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \cdot \delta_{b_n}$, kde δ_x je Diracova míra soustředěná v bodě x. Nekonečnou sumu chápeme ve smyslu konvergence v prostoru $\mathcal{M}(X)$.

V případě obecnějších lokálně kompaktních prostorů již můžeme narazit na potíže. Pokud například X obsahuje nějaký izolovaný bod, pak žádná kmitající znaménková míra na X nemůže existovat.

Uvažujme nyní prostor X všech ordinálních čísel až do ω_1 včetně, kde mezi každé dva po sobě jdoucí ordinály "vlepíme"kopii intervalu [0,1]. Potom X je lineárně uspořádaný prostor, který má suprema i infima, je tedy kompaktní. Navíc X nemá žádné izolované body. Přesto na X neexistuje žádná kmitající znaménková míra, protože v X existuje nespočetný systém navzájem disjunktních otevřených množin. Kdyby $\mu^+(G_\alpha) > 0$ pro každou G_α z nějakého nespočetného systému $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ otevřených disjunktních množin, pak by $\mu^+(X) \geq \sup\{\sum_{\alpha\in\mathcal{B}} \mu^+(G_\alpha) \,|\, \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \text{ spočetná}\} = \infty$ a podobně $\mu^-(X) = \infty$.

Tomuto problému lze zabránit požadavkem, aby X měl spočetnou otevřenou bázi, což zahrnuje případy, kdy X je kompaktní metrický prostor nebo $X = \mathbb{R}^m$. Uvidíme, že potom už kmitající znaménkové míry vždy existují. Příslušné tvrzení zformulujeme obecněji, abychom rovnou ukázali i existenci kmitajících měr, které jsou v nějakém smyslu "hezčí".

Nechť $\mathcal{A}(X)$ je podprostor $M(X)$. Řekneme, že $\mathcal{A}(X)$ *obsahuje impulsy*, jestliže pro každou $G \subset X$ otevřenou existuje $\nu \in \mathcal{A}(X)$ splňující $\|\nu\| \leq 1$ a $\nu^+(G) \geq \frac{1}{2}$.

Příklady 2.1

1. Nechť $\mathcal{A}(X) = \mathcal{M}(X)$
   Je-li $G \subset X$ otevřená a $\nu = \delta_x$, kde $x \in G$ je libovolný bod a δ_x je Diracova míra soustředěná v bodě x, pak ν je impuls.

2. Nechť $\mathcal{A}(X) = \mathcal{M}_0(X) = \{\mu \in \mathcal{M}(X) | \, \mu(X) = 0\}$
   Položíme-li $\nu = \frac{1}{2} \cdot \delta_x - \frac{1}{2} \cdot \delta_y$, kde x a y jsou nějaké dva různé body z G, potom ν je impuls.

3. Nechť $\mathcal{A}(X) = \mathcal{AC}(\mu_0) = \{\mu \in \mathcal{M}(X) \,|\, \mu \ll \mu_0\}$, kde $\mu_0 \in \mathcal{M}(X)$ splňuje $supp(\mu_0) = X$, a $G \subset X$ otevřená, $|\mu_0|(G) = D > 0$. Předpokládejme například, že $\mu_0^+(G) \geq \frac{D}{2}$(jinak na konci položíme $\widetilde{\nu} = -\nu$) . Nalezneme $K^+, K^- \subset G$ disjunktní kompaktní množiny tak, že $\mu_0 = \mu_0^+$ na $K^+, \mu_0 = \mu_0^-$ na K^- a $\mu_0^+(K^+) + \mu_0^-(K^-) > \frac{3}{4} D$ (zevnitř aproximujeme Hahnův rozklad μ_0). Podle Urysonova lemmatu existují disjunktní otevřené množiny $V, W \subset G, K^+ \subset V, K^- \subset W$ a funkce $f, g \in \mathcal{C}_C(X), 0 \leq f \leq 1, 0 \leq g \leq 1, f = 1$ na K^+ a $f = 0$ mimo V, $g = 1$ na K^- a $g = 0$ mimo W. Položíme $h = f - g, d\mu = h \cdot d\mu_0$. Je $\|\mu\| \leq D, \mu^+(G) \geq \mu_0^+(K^+) + \mu_0^-(K^-) - |\mu_0|(G \setminus (K^+ \cup K^-)) \geq \frac{3}{4} D - \frac{1}{4} D = \frac{D}{2}$. Nakonec stačí položit $\nu = \frac{1}{D} \cdot \mu$ a opět vidíme, že $A(X)$ obsahuje impulsy.

Věta 2.2 *Nechť X je lokálně kompaktní prostor se spočetnou bází a bez izolovaných bodů, $\mathcal{A}(X)$ uzavřený podprostor $\mathcal{M}(X)$, který obsahuje impulsy. Potom množina $\mathcal{K}(X) \cap \mathcal{A}(X)$ je 2.kategorie v $A(X)$. Speciálně $\mathcal{K}(X) \cap \mathcal{A}(X)$ je neprázdná.*

Důkaz: Použijeme Baireovu větu o kategoriích. Označíme $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ otevřenou bázi X a definujeme $E_n^+ = \{\mu \in \mathcal{A}(X) | \, \mu^+(G_n) = 0\}$, $E_n^- = \{\mu \in \mathcal{A}(X) | \, \mu^-(G_n) = 0\}$. Platí $\mathcal{A}(X) \setminus \mathcal{K}(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^+ \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^-$ Ukážeme, že E_n^+ a E_n^- jsou uzavřené a řídké.
Pro uzavřenost uvažujme posloupnost $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E_n^+$, $\mu_n \to \mu$. Potom také $\mu_n \to \mu$ ve w^*-konvergenci na $\mathcal{M}(X)$. Předpokládejme , že $\mu^+(G_n) > 0$. Nechť $\varphi \in \mathcal{C}_c(X), 0 \leq \varphi \leq 1, \varphi = 0$ mimo G_n a $\int_X \varphi \, d\mu > 0$. Potom w^*-konvergence dává $0 \geq \int_X \varphi \, d\mu_n \to \int_X \varphi \, d\mu > 0$, což je spor.
Zvolme nyní $\mu \in E_n^+$ a $\varepsilon > 0$. X je Hausdorffův a nemá izolované body, takže G_n je nekonečná. Existuje tedy $z \in G_n$ takové, že $\mu^-\{z\} < \frac{\varepsilon}{3}$. Vzhledem k regularitě μ^- můžeme nalézt $G \in G_n$ otevřenou splňující $z \in G_n$ a

$\mu^-(G) < \frac{\varepsilon}{3}$. Nechť $\nu \in \mathcal{A}(X), \nu^+(G) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ a $\|\nu\| \leq \varepsilon$. Položíme $\gamma = \mu + \nu$. Je $\|\mu - \gamma\| \leq \varepsilon, \gamma^+(G_n) \geq \gamma^+(G) \geq \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{3} > 0$. Tedy $\gamma \notin E_n^+$.Ukázali jsme, že množiny E_n^+ jsou uzavřené a mají prázdný vnitřek, jsou tedy řídké.
Zcela analogicky jsou řídké i množiny E_n^-. Protože $\mathcal{A}(X)$ je uzavřený podprostor Banachova prostoru $\mathcal{M}(X)$, je to úplný prostor. Množina $\mathcal{A}(X) \setminus \mathcal{K}(X)$ je v něm podle předchozího 1.kategorie. Podle Baireovy věty je tedy $\mathcal{A}(X) \cap \mathcal{K}(X)$ 2.kategorie.

□

Poznámka Množina kmitajících znaménkových měr je 2.kategorie v prostorech $\mathcal{M}(X), \mathcal{M}_0(X), \mathcal{AC}(\mu_0)$ (podle předchozí věty a příkladu 2.1). Přesněji, $\mathcal{A}(X) \cap \mathcal{K}(X)$ ve Větě 2.2 tvoří dokonce Baireův prostor; z důkazu totiž plyne, že $\mathcal{A}(X) \cap \mathcal{K}(X)$ je G_δ hustá v úplném prostoru $\mathcal{A}(X)$. Přitom je-li A nějaká G_δ hustá podmnožina Baireova prostoru Y a $\{G_n\} \subset A$ spočetná posloupnost otevřených hustých množin v A, existují množiny $\{\widetilde{G_n}\}$ otevřené husté v Y tak, že $G_n = \widetilde{G_n} \cap A$. Potom $\bigcap G_n = \bigcap \widetilde{G_n} \cap A$ je G_δ hustá v Y a tím spíše hustá v A, takže A je Baireův prostor.

Z Věty 2.2 plyne i následující tvrzení, které lze dokázat také elementárněji s využitím diskontinuí kladné míry.

Důsledek 2.3 *Existuje $A \subset \mathbb{R}^m$ měřitelná množina splňující $\lambda(A \cap G) > 0, \lambda(G \setminus A) > 0$ pro každou $G \subset \mathbb{R}^m$ neprázdnou.*

Důkaz: Podle příkladu 2.1 (3) a Věty 2.2 existuje na $\mathbb{R}^m$ kmitající znaménková míra μ absolutně spojitá vzhledem k nějaké konečné míře γ na $\mathbb{R}^m$ takové, že $\gamma \ll \lambda \ll \gamma$. Je-li (P, N) nějaký Hahnův rozklad μ, můžeme položit $A = P$.

□

2.2 Aproximativně spojité funkce

Aproximativně spojité funkce jsou velmi užitečným nástrojem pro zkoumání zajímavých derivací. V tomto oddílu shrneme některé jejich vlastnosti, které později využijeme k přímé konstrukci kmitajících měr na $\mathbb{R}^m$. Odměnou za trochu větší náročnost je značná účinnost této konstrukce - pomocí aproximativně spojitých funkcí můžeme sestrojit znaménkovou míru na $\mathbb{R}^m$, která má všude derivaci podle Lebesgueovy míry, se zadaným polárním rozkladem (k obecně komplexní míře na měřitelném prostoru existuje podle Radon-Nikodymovy věty komplexní měřitelná funkce h, $|h| = 1$, pro niž $d\mu = h\,d|\mu|$, viz [7]. V případě znaménkové míry je pak $h(x) = \pm 1$ pro každé x. Máme tedy na mysli rozklad na množiny $\{h > 0\}$ a $\{h < 0\}$.) Speciálně pro $m = 1$ dostaneme jinou konstrukci Köpckeho funkce.

Symbolem $U_r(x)$, resp. $B_r(x)$ označíme otevřenou, resp. uzavřenou kouli v $\mathbb{R}^m$ se středem v x a poloměrem $r > 0$. Symbol λ bude značit Lebesgueovu míru na $\mathbb{R}^m$ a λ^* vnější Lebesgueovu míru.
Nechť $x \in \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^m$. *Horní*, resp. *dolní hustotou množiny A v bodě x* se nazývá číslo

$$\Theta^*(x, A) = \limsup_{r \to 0^+} \frac{\lambda^*(U_r(x) \cap A)}{\lambda(U_r(x))}, \text{ resp. } \Theta_*(x, A) = \liminf_{r \to 0^+} \frac{\lambda^*(U_r(x) \cap A)}{\lambda(U_r(x))}.$$

Pokud se horní i dolní hustota množiny A v bodě x rovnají, nazýváme jejich společnou hodnotu *hustotou množiny A v bodě x* a značíme $\Theta(x, A)$.

Bod x nazveme *bodem hustoty A*, pokud $\Theta(x, A) = 1$. Podle Lebesgueovy věty o hustotě je $\Theta(x, A) = 1$ pro skoro všechna $x \in A$, je-li A měřitelná [3]. Pro A měřitelnou navíc platí $\Theta(x, A) = 1$ právě když $\Theta(x, \mathbb{R}^m \setminus A) = 0$.

Množinu $G \subset \mathbb{R}^m$ nazveme *d-otevřenou*, je-li lebesgueovsky měřitelná a každý její bod je bodem hustoty G. Systém všech d-otevřených množin tvoří topologii na R^m, tzv.hustotní topologii, která je jemnější než klasická eukleidovská topologie [3]. V dalším textu budeme termíny d-spojitá funkce, Int_d apod. používat právě v souvislosti s hustotní topologií.

Funkce $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ se nazývá *aproximativně spojitá v bodě $x \in \mathbb{R}^m$*, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ je $\Theta(x, \{y \in \mathbb{R}^m \,|\, |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon\}) = 0$. Ekvivalentně, f je aproximativně spojitá v bodě x, pokud existuje měřitelná množina E taková, že $\Theta(x, E) = 1$ a $\lim_{y \to x, y \in E} f(y) = f(x)$. Podle Denjoyovy věty je f lebesgueovsky měřitelná, právě když je aproximativně spojitá ve skoro všech bodech [3].

Řekneme, že f je *aproximativně spojitá*, je-li aproximativně spojitá v každém bodě $x \in \mathbb{R}^m$. Každá aproximativně spojitá funkce je měřitelná, takže pro každý bod x a $\varepsilon > 0$ je dokonce $\Theta(x, \{|f(y) - f(x)| < \varepsilon\}) = 1$. Jinými slovy $x \in Int_d(\{|f(y) - f(x)| < \varepsilon\})$. To silně připomíná klasickou definici spojitosti. Skutečně platí následující charakterizace:

Věta 2.4 *Funkce $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je aproximativně spojitá, právě když je d-spojitá.*

Důkaz: Je-li f aproximativně spojitá a $f(x) > \alpha$ pro nějaké $x \in \mathbb{R}^m$, existuje měřitelná množina E taková, že $\Theta(x, E) = 1$ a $\lim_{y \to x, y \in E} f(y) = f(x)$. Tedy pro r dost malé je $U_r(x) \cap Int_d E$ d-okolí x, které je podmnožinou $\{f > \alpha\}$.

Naopak je-li f d-spojitá, je měřitelná a pro každé $x \in \mathbb{R}^m$ a $\varepsilon > 0$ je $\Theta(x, \{|f(y) - f(x)| < \varepsilon\}) = 1$, tudíž $\Theta(x, \{|f(y) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$ a f je aproximativně spojitá v x.

□

Poznámka Důsledkem předchozí věty je mimo jiné uzavřenost aproximativně spojitých funkcí na běžné aritmetické operace + , - , · , ÷ (má-li taková operace smysl).

Nechť $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^m)$. Bod $x \in \mathbb{R}^m$ se nazývá *Lebesgueovým bodem* funkce f, jestliže

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\lambda(U_r(x))} \int\limits_{U_r(x)} |f(x) - f(t)|\, dt = 0.$$

Neurčitý integrál reálné funkce f má derivaci v každém Lebesgueově bodě x funkce f rovnu $f(x)$, podobně je-li f Radon-Nikodymovou derivací míry μ podle λ na $\mathbb{R}^m$, je $f(x)$ rovno derivaci $\frac{D\mu}{D\lambda}$ v každém Lebesgueově bodě f [7].

Tyto dva případy je nutno rozlišit, poněvadž pojem derivace míry v $\mathbb{R}^m$ není zobecněním pojmu derivace reálné funkce; příkladem je funkce $f(x) = |x|$ na [-1,1], která v 0 nemá derivaci v klasickém smyslu, nicméně derivace jí příslušné (znaménkové) Lebesgue-Stieltjesovy míry podle λ v 0 je nulová. Pojem Lebesgueova bodu zastřešuje oba dva pojmy; proto v dalším textu budeme pojmem *míra μ diferencovatelná vzhledem k ν* označovat, že $\mu \ll \nu$ a každý bod $x \in \mathbb{R}^m$ je Lebesgueovým bodem Radon-Nikodymovy derivace μ podle ν.

Východiskem pro úvahy o derivacích je následující vlastnost aproximativně spojitých funkcí:

Tvrzení 2.5 *Nechť $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ měřitelná je omezená na nějakém okolí bodu $x \in \mathbb{R}^m$. Potom f je aproximativně spojitá v bodě x právě tehdy, když bod x je Lebesgueovým bodem funkce f.*

Důkaz: Nechť $x \in \mathbb{R}^m$ a $|f| \leq M$ na okolí x. Označíme $A_\varepsilon = \{t \in \mathbb{R}^m \,|\, |f(x) - f(t)| \geq \varepsilon\}$. Je-li x Lebesgueovým bodem f, pak

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\lambda(U_r(x))} \int\limits_{U_r(x)} |f(x) - f(t)| \, dt = 0$$

takže $\frac{1}{\lambda(U_r(x))} \lambda(U_r(x) \cap A_\varepsilon) \to 0$ pro každé $\varepsilon > 0$. Naopak, pokud $\frac{1}{\lambda(U_r(x))} \lambda(U_r(x) \cap A_\varepsilon) \to 0$ pro každé $\varepsilon > 0$, je

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\lambda(U_r(x))} \cdot \int\limits_{U_r(x)} |f(x) - f(t)| \, dt \leq$$

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\lambda(U_r(x))} \cdot \left(\int\limits_{U_r(x) \cap A_\varepsilon} |f(x) - f(t)| \, dt + \int\limits_{U_r(x) \setminus A_\varepsilon} \varepsilon \, dt \right) \leq (2M + 1) \cdot \varepsilon.$$

□

Podle předchozí věty lze problém sestrojit derivaci určitých vlastností redukovat na problém sestrojení vhodné omezené aproximativně spojité funkce. Vzhledem k omezenosti stačí konstruovat funkce splňující $0 \leq \varphi \leq 1$. Nás bude v analogii s nikde monotónními funkcemi zajímat především možnost rozhodnout, v kterých bodech bude naše funkce nulová, resp. nenulová. K tomu použijeme následující tvrzení:

Tvrzení 2.6 *Nechť $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ omezená aproximativně spojitá. Potom φ je 1. Baireovy třídy, tedy existuje posloupnost $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ spojitých funkcí, která bodově konverguje k φ.*

Důkaz: Položíme $\varphi_n(x) = \frac{1}{\lambda(U_{1/n}(x))} \cdot \int\limits_{U_{1/n}(x)} \varphi(t) \, dt$ a aplikujeme tvrzení 2.5.

□

Množiny $\{\varphi > \alpha\}, \{\varphi < \alpha\}$ jsou pro funkci φ, která je 1.Baireovy třídy, typu F_σ. To nám spolu s větou 2.4 říká, že množina, kde bude naše funkce kladná (nebo záporná), by měla být d-otevřená typu F_σ.

V následujících odstavcích ukážeme, že taková podmínka už je i postačující; kdykoliv A je d-otevřená typu F_σ, můžeme sestrojit aproximativně spojitou funkci φ takovou, že $0 \leq \varphi \leq 1$ a $\{\varphi > 0\} = A$.

K tomu použijeme konstrukci podobnou důkazu Urysonova lemmatu, jak je popsán v [7].

Nechť τ a σ jsou dvě topologie na množině X, $\sigma \subseteq \tau$. Řekneme, že τ má *Luzin-Menšovovu vlastnost* vzhledem k σ, jestliže pro každé dvě množiny $F, G \subset X$, kde F je σ-uzavřená a G je τ-otevřená, $F \subset G$, existuje E σ-uzavřená taková, že $F \subset Int_\tau(E) \subset E \subset G$.

Nyní chceme ukázat, že hustotní topologie na $\mathbb{R}^m$ má Luzin-Menšovovu vlastnost vzhledem k Eukleidovské topologii; to bude klíčový krok naší konstrukce. V důkazu použijeme známou Vitaliovu větu o pokrytí a následující tvrzení:

Tvrzení 2.7 *Nechť $A \subset \mathbb{R}^m$ neprázdná, $\varepsilon > 0$. Potom $\lambda(\{x \in \mathbb{R}^m \mid dist(x, A) = \varepsilon\}) = 0$.*

Důkaz: Můžeme předpokládat, že A je uzavřená. Funkce $x \mapsto dist(x, A)$ je spojitá, takže $E := \{x \in \mathbb{R}^m \mid dist(x, A) = \varepsilon\}$ je měřitelná. Podle Lebesgueovy věty o hustotě jsou skoro všechny její body body hustoty. Stačí tedy ukázat, že E neobsahuje žádné body hustoty.

Zvolme $x \in E$. $A \cap B_{2\varepsilon}(x)$ je kompaktní, takže existuje $y \in A$, $|x - y| = dist(x, A) = \varepsilon$. Potom $\Theta^*(x, E) \leq \limsup_{r \to 0^+} \frac{\lambda(U_r(x) \setminus U_\varepsilon(y))}{\lambda(U_r(x))} = \frac{1}{2}$.

□

Nechť $A \subset \mathbb{R}^m$. Řekneme, že systém $\mathcal{V}$ uzavřených koulí je *vitaliovské pokrytí* A, jestliže pro každé $x \in A$ a $r > 0$ existuje $B \in \mathcal{V}$, $x \in B \subset B_r(x)$.

Věta 2.8 *(*Vitali*) Nechť $\mathcal{V}$ je vitaliovské pokrytí $A \subset \mathbb{R}^m$. Potom existuje spočetný disjunktní podsystém $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ takový, že $\lambda(A \setminus \bigcup \mathcal{W}) = 0$.*

Důkaz: Viz [3].

□

Lemma 2.9 *(*Luzin-Menšovova vlastnost hustotní topologie*) Pro každou $G \subset \mathbb{R}^m$ d-otevřenou a $F \subset G$ uzavřenou existuje E uzavřená, $F \subset Int_d(E) \subset E \subset G$.*

Důkaz: Nechť $H \subset \mathbb{R}^m$ otevřená, $F \subset H$, $\lambda(H \setminus F) < \infty$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položíme $A_n := \{z \in \mathbb{R}^m \,|\, dist(z,F) \in (2^{-n-1}, 2^{-n})\} \cap G$. Můžeme předpokládat, že $G \subset H$ a že platí $G \setminus F = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (v opačném případě můžeme místo G uvažovat množinu $\widetilde{G} := (G \cap H) \setminus (\{dist(\cdot, F) \geq \frac{1}{2}\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{dist(\cdot, F) = 2^{-n}\})$, což je podle opět d-otevřená podmnožina G obsahující F).

Pro $n \in \mathbb{N}$ dále položíme $\Lambda_n := \{B_r(x) \,|\, x \in A_n, r > 0, B_r(x) \subset \{dist(\cdot, F) \in (2^{n-1}, 2^{-n})\} \cap H\}$. Systém Λ_n tvoří vitaliovské pokrytí A_n, takže podle Vitaliovy věty existuje $\{A_n^k\}_{n\in\mathbb{N}}$ spočetný disjunktní podsystém Λ_n splňující $\lambda(A_n \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^k) = 0$. Platí $\lambda(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_n^k) \leq \lambda(H \setminus F) < \infty$, takže pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $k_n \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{k=k_n+1}^{\infty} \lambda(A_n^k) < \alpha_m \cdot (2^{-n-1})^m \cdot 2^{-n}$, kde α_m je míra jednotkové koule v $\mathbb{R}^m$. Pro $k = 1, \ldots, k_n$ nalezneme kompaktní množiny $F_n^k \subset A_n^k \cap G$ tak, aby $\lambda((A_n^k \cap G) \setminus F_n^k) < \alpha_m \cdot (2^{-n-1})^m \cdot 2^{-n-k}$. Pro $k > k_n$ položíme $F_n^k = \emptyset$.

Definujeme $E := F \cup \bigcup_{n,k\in\mathbb{N}} F_n^k$. Potom:

- $F \subset E \subset G$.
- E je uzavřená.

  Nechť $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset E$, $x_j \to x \in \mathbb{R}^m$. Předpokládejme, že $x_j \notin F$ (jinak vybereme podposloupnost $\{x_i\} \subset \{x_j\} \cap F$ a bude $x \in F$ z uzavřenosti). Pokud pro nějaké k a n je $x_j \in F_n^k$ pro nekonečně mnoho j, pak $x \in F_n^k$ (F_n^k kompaktní). Pokud pro nějaké n je $x_j \in F_n^{k_j}$ pro nekonečně mnoho j, pak existuje k takové, že $x_j \in F_n^k$ pro nekonečně mnoho j (pro dané n je jen konečně mnoho F_n^k neprázdných), tedy opět $x \in F_n^k$. V jiném případě lze vybrat $\{x_i\} \subset \{x_j\}$ podposloupnost, $x_i \in F_{n_i}^{k_i}$, $n_i \to \infty$. Ze spojitosti funkce $dist(\cdot, F)$ máme $dist(x, F) = \lim_{i\to\infty} dist(x_i, F) = 0$ a $x \in F \subset E$.

- $F \subset Int_d(E)$

  Zvolme $x \in F$, $\varepsilon > 0$. Protože x je bod hustoty G, existuje $r_0 > 0$: $\frac{\lambda(B_r(x)\setminus G)}{\lambda(B_r(x))} < \frac{\varepsilon}{2}$ pro $r \in (0, r_0)$. Pro $N \in \mathbb{N}$ splňující $2^{-N} < r_0$ a pro $r \in [2^{-N-1}, 2^{-N})$ platí odhady:

$$\frac{\lambda(B_r(x) \setminus E)}{\lambda(B_r(x))} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\lambda(B_r(x)) \cap G \setminus E)}{\lambda(B_r(x))} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\lambda((B_r(x) \cap (G \setminus F)) \setminus \bigcup_{n,k\in\mathbb{N}} F_n^k)}{\alpha_m \cdot r^m} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\lambda(\bigcup_{n\geq N} A_n \setminus \bigcup_{n,k\in\mathbb{N}} F_n^k)}{\alpha_m \cdot (2^{-N-1})^m} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\alpha_m \cdot (2^{-N-1})^m} \cdot \sum_{n\geq N} \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda((A_n^k \cap G) \setminus F_n^k) \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n\geq N}\left(\sum_{k=1}^{k_n} 2^{-n-k} + 2^{-n}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n\geq N}(2^{-n-1} + 2^{-n}) \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2^{-N+3} < \varepsilon$$

pro N dost velké.

$\square$

Jsou-li $A, B \subset \mathbb{R}^m$, budeme psát $A \preceq B$, pokud $A \subset Int_d B$.

Věta 2.10 *Nechť $F \subset \mathbb{R}^m$ d-otevřená množina typu F_σ. Potom existuje $\varphi : \mathbb{R}^m \to [0,1]$ aproximativně spojitá funkce taková, že $\{\varphi > 0\} = F$. Navíc lze požadovat, aby φ byla shora polospojitá.*

Důkaz: Nechť $F = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$, F_j uzavřené. Pro $n \in \mathbb{N}_0$ sestrojíme s využitím Luzin-Menšovovy vlastnosti hustotní topologie indukcí uzavřené množiny $E_{1/n}$ takto:

1. $F_1 \preceq E_1 \preceq F$
2. $\bigcup_{j=1}^{k} F_j \cup E_{1/(k-1)} \preceq E_{1/k} \preceq F$, $k \geq 2$.

Je tedy $E_1 \preceq E_{\frac{1}{2}} \preceq \ldots \preceq E_{1/n} \preceq \ldots \preceq F$ a $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_{1/n}$. Označíme $\mathbb{Q}_0^1 := \mathbb{Q} \cap (0,1]$. Čísla z $\mathbb{Q}_0^1 \setminus \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}_0\}$ seřadíme do posloupnosti $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Postupujeme opět indukcí; k danému n nalezneme j tak, aby $q_n \in (\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j})$. Položíme $p_0 = \frac{1}{j+1}$, $p_1 = \frac{1}{j}$. Nechť $\{p_k\}_{k=0}^{M}$ je množina $\{p_0, p_1\} \cup \{q_l \,|\, l \leq n, q_l \in (\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j})\}$. Nalezneme největší p_k a nejmenší p_l tak aby platilo $p_k \leq q_n \leq p_l$. Potom vybereme uzavřenou množinu E_{q_n} splňující $E_{p_l} \preceq E_{q_n} \preceq E_{p_k}$. Tímto způsobem získáme systém $\{E_q\}_{q\in\mathbb{Q}_0^1}$ uzavřených množin takových, že $F = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}_0^1} E_q$ a pro každé $p, q \in \mathbb{Q}_0^1, p < q$ je $E_q \preceq E_p$. Položíme

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{, pokud } x \notin F \\ \sup\{q \in \mathbb{Q}_0^1 \,|\, x \in Int_d E_q\} & \text{, jinak} \end{cases}$$

$$\psi = \begin{cases} 0 & \text{, pokud } x \notin F \\ \inf\{q \in \mathbb{Q}_0^1 \,|\, x \notin E_q\} & \text{, jinak} \end{cases}$$

Potom

$\{\varphi > \alpha\} = \bigcup_{\substack{q>\alpha \\ q\in\mathbb{Q}_0^1}} Int_d(E_q)$ je d-otevřená, tedy φ je zdola d-polospojitá

$\{\psi < \alpha\} = \bigcup_{\substack{q<\alpha \\ q\in\mathbb{Q}_0^1}} \mathbb{R}^m \setminus E_q$ je otevřená, tedy ψ je shora polospojitá a tudíž i

shora d-polospojitá.
Ověříme, že $\varphi = \psi$. Je-li $\varphi(x) \neq \psi(x)$ pro nějaké x, pak nutně $\varphi(x) < \psi(x)$. Zvolíme $p, q \in \mathbb{Q}$ tak, že $\varphi(x) < q < p < \psi(x)$. Potom $x \notin Int_d(E_q)$, $x \in E_p$. Zároveň platí $E_p \preceq E_q$, takže z $x \in E_p$ plyne $x \in Int_d(E_q)$, což je spor. Je tedy $\varphi = \psi$ a φ je d-spojitá a shora polospojitá. Podle věty 2.4 je φ aproximativně spojitá, navíc jistě platí $\{\varphi > 0\} = F$.

□

Vlastnost hustotní topologie popsaná ve znění věty 2.10 se nazývá *Zahorského vlastnost* vzhledem k eukleidovské topologii. Podrobně se hustotními topologiemi zabývá [4].

Poznámka Vždy lze dodatečně zařídit, aby φ byla lebesgueovsky integrovatelná. Místo φ můžeme totiž uvažovat funkci $\varphi \cdot \psi$, kde ψ je nějaká spojitá nezáporná a všude nenulová integrovatelná funkce, například $e^{-|x|^2}$.

Tvrzení 2.11 *Nechť $P, N \subset \mathbb{R}^m$ jsou dvě disjuktní měřitelné množiny. Potom existuje znaménková míra μ diferencovatelná vzhledem k λ taková, že vztahy $P = \{\frac{D\mu}{D\lambda} > 0\}$ a $N = \{\frac{D\mu}{D\lambda} < 0\}$ platí až na množiny nulové Lebesgueovy míry.*

Důkaz: d-vnitřek každé měřitelné množiny se od ní liší o množinu nulové míry a každou měřitelnou množinu lze zevnitř aproximovat množinou typu F_σ až na množinu nulové míry; existují tedy d-otevřené množiny $\widetilde{P} \subset P$, $\widetilde{N} \subset N$ typu F_σ splňující $\lambda(P \setminus \widetilde{P}) = \lambda(N \setminus \widetilde{N}) = 0$. Podle Věty 2.10 a následující poznámky sestrojíme omezené integrovatelné aproximativně spojité funkce $\varphi, \psi : \mathbb{R}^m \to [0, 1]$ takové, že $\widetilde{P} = \{\varphi > 0\}$, $\widetilde{N} = \{\psi > 0\}$. Nakonec stačí položit $d\mu = (\varphi - \psi)\, d\lambda$.

□

Důsledek 2.12 *Existuje kmitající znaménková míra μ na $\mathbb{R}^m$ diferencovatelná vůči λ.*

Důkaz: Stačí aplikovat předchozí tvrzení na množiny $A, \mathbb{R}^m \setminus A$, kde A je jako ve 2.3

□

Položíme-li $m = 1$, dostáváme omezenou aproximativně spojitou funkci f na $\mathbb{R}$, jejíž každý bod je Lebesgueův. Primitivní funkce k f je tedy Köpckeho funkcí.

Literatura

[1] J. Blažek, E. Borák, J. Malý : *On Köpcke and Pompeiu functions.* Časopis pro pěstování matematiky 103(1978), 53-61

[2] A.B. Kharazishvili : *Strange functions in real analysis.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, New York, 2000

[3] J.Lukeš, J.Malý : *Measure and Integral.* Matfyzpress, Praha 2005

[4] J.Lukeš, J.Malý, L.Zajíček : *Fine topology methods in real analysis and potential theory.* Springer-Verlag 1986

[5] J.N. McDonald : *Compact convex sets with the equal support property.* Pacific J. Math. 37(1971), 429-443

[6] J.N. McDonald : *Some constructions with Choquet simplexes.* J. London Math. Soc.6(1973), 307-310

[7] W.Rudin : *Analýza v reálném a komplexním oboru.* Academia, Praha 2003

[8] C.E. Weil : *On nowhere monotone functions.* Proc. Amer. Math. Soc. 56(1976), 388-389