

1 Základné informácie

<i>Autor(i)</i>	<i>Recenzent(i)</i>	<i>Verzia</i>
Lubomír Šnajder	Stanislav Krajčí, Ján Guniš, Lubomír Antoni, Stanislav Lukáč, Jana Plichtová, Stanislav Krajkovič, Martina Nesládeková, Oto Pejko, Ján Poradský, Lubomíra Šestáková	2015_10_06
<i>Téma</i>		<i>Cieľová skupina</i>
Bit – jednotka informácie; výpočet množstva informácie v správe		1. ročník gymnázia
<i>Vstupné vedomosti a spôsobilosti</i>		<i>Trvanie</i>
<ul style="list-style-type: none"> Prevádzať celé čísla medzi pozičnými číselnými sústavami, určiť následníka čísla, sčítavať čísla v určitej pozičnej sústave. Aplikovať mocninové funkcie pri riešení úloh. 		90 minút
<i>Kognitívne ciele</i>		<i>Afektívne ciele</i>
<ul style="list-style-type: none"> Objaviť a aplikovať algoritmus binárneho vyhľadávania na určenie hľadanej karty z balíka hracích kariet, resp. čísla z určitej množiny čísel. Zdôvodniť, že na určenie karty z balíka 32 kariet potrebujeme položiť 5 binárnych otázok (resp. 3 ternárne otázky na určenie karty z balíka 27 kariet). Vysvetliť, že každou odpoveďou na vhodne položenú otázku získame viac informácií o hľadanom objekte, po 1 otázke typu áno/nie získame 1 bit informácie (po ternárnej, resp. decimálnej otázke získame 1 trit, resp. 1 decit). Vysvetliť, že množstvo informácie potrebnej na určenie vybranej karty závisí od celkového počtu kariet a tiež od spôsobu kladenia otázok (počtu rôznych možných odpovedí na otázku). Kódovať atribúty objektov (farbu a hodnotu karty) číslami dvojkovej sústavy. Riešiť problémy využitím rôznych stratégií – zjednodušením problému, nakreslením diagramu, hľadaním opakujúceho sa vzoru. 		<ul style="list-style-type: none"> Zlepšiť postoj k informatike vďaka herným aktivitám. Posilniť zvedavosť a kritické myslenie.
<i>Spôsobilosti vedeckej práce</i>		<i>Didaktický problém</i>
<ul style="list-style-type: none"> Skúmať vzťahy medzi premennými – medzi najmenším počtom binárnych otázok a celkovým počtom kariet. Hľadať argumenty na zdôvodnenie experimentálnych zistení – jednoznačnosti binárneho kódu, princípu „kúzelných kariet“. 		<ul style="list-style-type: none"> Vo výučbe informatiky sa nevenuje patričný priestor jednoduchým výpočtom množstva informácie v správe. Experimentovaním a heuristickým rozhovorom vedieme žiakov, uvedomili vzťah medzi bitom ako binárnou číslicou a jednotkou informácie, vedeli určiť minimálny počet (binárnych) otázok potrebných pri určovaní objektov (napr. kariet, čísel).
<i>Didaktické prostriedky</i>		<i>Didaktické metódy a organizačné formy</i>
<ul style="list-style-type: none"> Pracovné listy (uvedené v prílohe), 4 kúzelné karty. Applety <i>Hádam karty</i> a <i>Hádam číslo</i>: http://scratch.mit.edu/projects/18018918/ a http://scratch.mit.edu/projects/13872378/. 		<ul style="list-style-type: none"> Experimentovanie, heuristický rozhovor. Skupinová a frontálna forma práce.

2 Príprava na výučbu

Pracovné listy, applety a diagramy

Každému žiakovi poskytneme tlačенý pracovný list (uvedený v prílohe metodiky) s postupnosťou zadaní úloh týkajúcich sa hier *Hádaj kartu* a *Hádaj číslo*. V prípade rozšíreného variantu metodiky zameraného na programovanie hry *Hádaj číslo* pomocou štyroch tzv. kúzelných kariet poskytneme žiakom tlačéný pracovný list so zadaním hry (uvedený v prílohe metodiky), pracovnými listami s odstupňovanou pomocou a dotazníkom.

Po riešení úlohy 4 z pracovného listu použijeme náš applet (umiestnený na webovej stránke <http://scratch.mit.edu/projects/18018918/>) na demonštrovanie určenia súbežne štyroch myslených kariet. Pri riešení úlohy 8 z pracovného listu poskytneme každej dvojici žiakov sadu štyroch kúzelných kariet alebo náš applet (umiestnený na webovej stránke <http://scratch.mit.edu/projects/13872378/>).

Pri expozícií a systemizácii učiva pomocou dataprojektora (prípadne interaktívnej tabule) zobrazujeme viaceré diagramy uvedené v metodike v časti Priebeh výučby (obrázky 1 – 8).

Zistenie a precvičenie predchádzajúcich vedomostí

Na predchádzajúcej vyučovacej hodine môžeme zistiť vstupné vedomosti a spôsobilosti žiakov potrebné pre preberané učivo na sade precvičovacích, resp. testovacích úloh, napr.:

- Uveďte, ktoré celé číslo nasleduje po čísle 10_2 .
- Uveďte, ktoré celé číslo nasleduje po čísle 111_2 .
- Preveďte číslo 37_{10} do dvojkovej sústavy.
- Preveďte číslo 101011_2 do desiatkovej sústavy.
- Určte výsledok sčítovania $1001_2 + 100_2$.
- Určte výsledok sčítovania $1101_2 + 1001_2$.
- Vypočítajte hodnoty výrazov 2^5 , 5^2 , $2 \cdot 5$.

3 Pribeh výučby

Pri tvorbe metodiky sme vychádzali z teórie učebného cyklu 5E (Zapoj sa, skúmaj, vysvetli, rozšír/rozpracuj, vyhodnoť, angl. Engage, Explore, Explain, Extend/Elaborate, Evaluate).

Osnova výučby

1. Opis hry *Hádaj kartu* (Engage) a hranie hry v dvojiciach (Explore)
2. Heuristický rozhovor zameraný na objavenie efektívneho spôsobu určenia myslenej karty (Explore) so zavedením pojmu *bit* ako jednotky informácie (Explain)
3. Frontálna demonštrácia hry s paralelným hádaním kariet zameraná na binárne kódovanie kariet (Engage, Explore, Explain)
4. Precvičovanie a zovšeobecňovanie učiva – binárny strom, N -árne hádanie čísel/kariet (Extend)
5. Celkové zhrnutie a vyhodnotenie prebraného učiva (Evaluate)

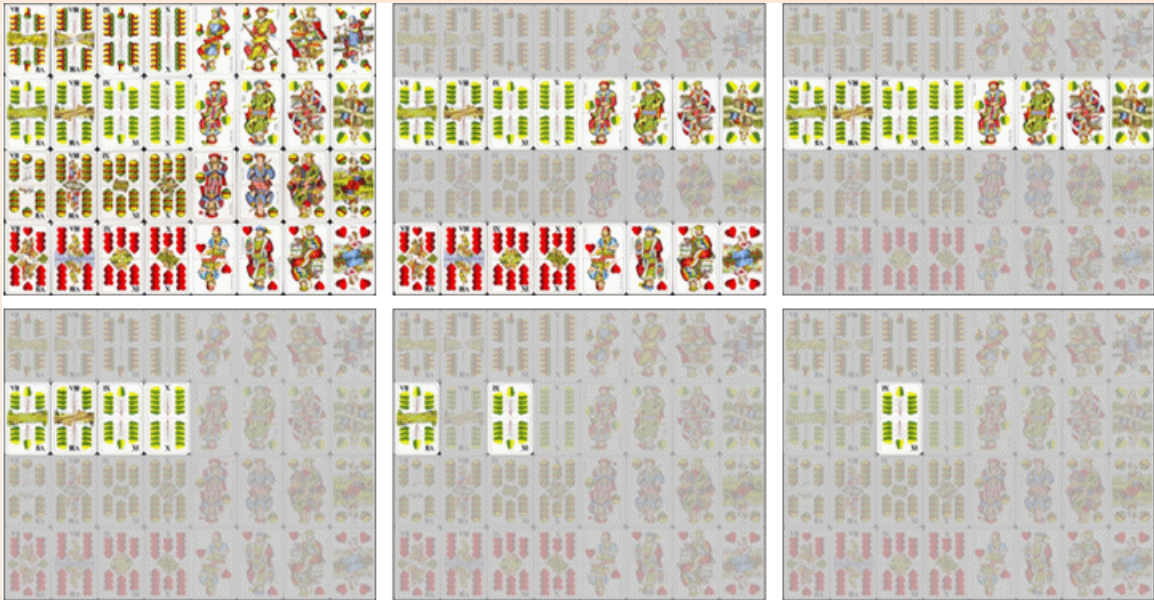
1 Opis hry

V úvode výučby učiteľ opíše hru zameranú na uhádnutie jednej karty z balíka 32 nemeckých kariet (u nás známe ako tzv. sedmové karty). Rozdá žiakom pracovný list (uvedený v prílohe metodiky) a vyzve ich, aby si v dvojiciach striedavo zahrali túto hru (úloha 1). Požiada žiakov, aby sledovali pokyny v pracovnom liste a zapisovali do neho svoje zistenia – otázky pri hádaní karty s odpoveďami súpera, celkový počet otázok potrebných na uhádnutie myslenej karty súpera, spoločný čo najlepší postup danej dvojice pri hádaní myslenej karty.

2 Heuristický rozhovor

V ďalšej časti učiteľ vedie heuristický rozhovor, ktorým privedie žiakov k objaveniu efektívneho spôsobu určenia myslenej karty. Ukážka modelového dialógu učiteľa so žiakmi:

U: „Môžeme uhádnuť kartu na prvý pokus?“
Ž: „Áno, ale nie vždy sa nám to podarí.“
U: „Koľko najviac otázok potrebujeme, aby sme uhádli kartu?“
Ž ₁ : „No, keď nemáme šťastie, tak na 32 pokusov.“ Ž ₂ : „Môžeme hádať aj viac ako 32-krát, keď si nebudeme pamätať uvedené karty. Ale v najhoršom prípade by malo stačiť najviac 31 pokusov.“
U: „Ako sa po každej otázke zmení množina, ktorá obsahuje hľadanú kartu?“
Ž ₁ : „Bude sa stále znižovať.“ Ž ₂ : „Bude sa znižovať, len keď položíme správnu otázku. Keď položíme ešte raz rovnakú otázku, nič nové sa nedozvieme.“
U: „Ako sa bude znižovať množina s hľadanou kartou?“
Ž: „Po každej otázke o jednu kartu.“
U: „Ako by sme mali klásť otázky, aby sa po nich zmenšila množina s hľadanou kartou viac ako o jednu kartu?“
Ž: „Je to zeleň?“
U: „Výborne. Aká veľká bude množina s hľadanou kartou po odpovedi na túto otázku?“
Ž: „Ak bude odpoveď áno, tak hľadaná karta bude jednou z 8 kariet. Ak nie, tak bude jednou z 24 kariet.“
U: „Ako by sme mali klásť otázky, aby sa množina s hľadanou kartou zmenšila na rovnakú veľkosť nezávisle“

od odpovede typu áno/nie?“
Ž: „Je hodnotou karty číslo?“
U: „Super. Ako sa teraz zmenší množina s hľadanou kartou?“
Ž: „Na polovicu.“
U: „Áno. Ako budeme klásť otázky týkajúce sa farby karty, aby sa zmenšila množina s hľadanou kartou na polovicu?“
Ž: „Je to červená alebo zelená?“
U: „Aká bude ďalšia otázka týkajúca sa farby hľadanej karty?“
Ž: „No. Po tejto otázke budem vedieť, či hľadaná karta bude z množiny {červená, zelená} alebo množiny {žltá, guľa}. Potom sa spýtam na jednu farbu z vybranej množiny, napr. ak je po prvej otázke odpoveď áno, tak sa ďalej opýtam, či je to červená. Potom už budem vedieť farbu karty.“
U: „Áno, po 2 otázkach vieme určiť farbu karty. Na začiatku máme 32 kariet. Po zodpovedaní prvej otázky typu áno/nie nám ostalo 16 kariet, po druhej otázke 8 kariet. Verím, že nebude pre vás ťažké vymyslieť ďalšie otázky na určenie hodnoty karty. Skúste to.“
Ž: „Spýtam sa, či je to číslo. Po tejto otázke ostanú len 4 karty. Po ďalšej otázke len 2 karty a napokon len 1 karta.“
U: „Koľko potom otázok potrebujeme na uhádnutie karty z balíka 32 nemeckých kariet?“
Ž: „Päť.“
U: „Áno. Potrebujeme 5 otázok typu áno/nie. Na začiatku má množina s hľadanou kartou 32 prvkov. Po každej otázke sa táto množina znižuje na 16, 8, 4, 2 prvky, až napokon na 1 prvok (pozri obr. 1)“

<p>Obr. 1 Postupné zužovanie kandidátov na hľadanú kartu z 32 na 1 kartu.</p> <p>„Pri hádaní alebo presnejšie povedané, pri určovaní myslenej karty z balíka 32 kariet odpoveď na každú otázku nám priniesla určitú informáciu.</p> <p>Týchto 5 odpovedí typu áno/nie nám prinieslo celú informáciu o karte.</p> <p>Podobne, ako vieme vážiť a merať predmety, vieme merať aj množstvo informácie.</p> <p>Každá odpoveď typu áno/nie znižujúca na polovicu množinu s hľadaným objektom (napr. kartou) nám priniesla informáciu 1 bit, ktorý je základnou jednotkou informácie. Inak povedané, informáciu veľkosti 1 bitu získame zo správy, ktorá vyjadruje jednu z dvoch rovnako pravdepodobných možností.</p> <p>Koľko najmenej otázok typu áno/nie potrebujeme na určenie farby karty a koľko na hodnotu karty? Ktoré sú to otázky?“</p>
<p>Ž: „Na určenie farby karty potrebujeme 2 otázky, napr.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Je to červená alebo zelená? 2. Je to červená? resp. Je to guľa? (v prípade zápornej odpovede na prvú otázku) <p>Na určenie hodnoty karty potrebujeme 3 otázky, napr.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Je to číslo? 2. Je to číslo nepárne? resp. Je to horník alebo dolník? (v prípade zápornej odpovede na prvú otázku) 3. Je to číslo 7?“ resp. otázka na inú hodnotu karty v závislosti od odpovede na predchádzajúcu otázku

<p>U: „Koľko bitové sú nasledovné správy (koľko otázok typu <i>áno/nie</i> je potrebných na ich určenie)?</p> <p>a) Farba karty je zeleň. b) Hodnota karty je kráľ. c) Karta je červené eso.“ (Poznámka: Táto úloha je uvedená v pracovnom liste ako úloha 2)</p>
<p>Ž: „a) 2 bity, b) 3 bity, c) 5 bitov.“</p>
<p>U: „a) Farba zeleň je jednou zo 4 čiže 2^2 možných farieb kariet. Na jej určenie potrebujeme dve 1-bitové otázky. b) Hodnota kráľ je jednou z 8 čiže 2^3 možných hodnôt kariet. Na jej určenie potrebujeme tri 1-bitové otázky. c) Červené eso je jednou z 32 čiže 2^5 možných kariet. Na jej určenie potrebujeme päť 1-bitových otázok.“</p> <p>Pri určovaní karty z balíka 32 nemeckých kariet môžeme získať 5 bitov niektorým z uvedených spôsobov, napr.:</p> <ul style="list-style-type: none"> • ako jednu 5-bitovú informáciu (napr. „červený kráľ“), • ako päť 1-bitových informácií (napr. „červená alebo zelená“, „červená alebo guľa“, „7, 8, 9 alebo 10“, „7, 9, dolník alebo kráľ“, „7, 8, dolník alebo horník“), • ako jednu 2-bitovú a jednu 3-bitovú informáciu (napr. „červená“, „kráľ“), • ako jednu 4-bitovú a jednu 1-bitovú informáciu (napr. „jedna z dvoch najvyšších červených figur“, „červený kráľ alebo červený horník“).

Ak v uvedenom dialógu obmedzíme potvrdzujúce hodnotiace odpovede učiteľa („Áno.“, „Výborne.“, „Super.“) a zapojíme do diskusie ďalších žiakov, mala by sa skvalitniť táto diskusia pri miernom navýšení času.

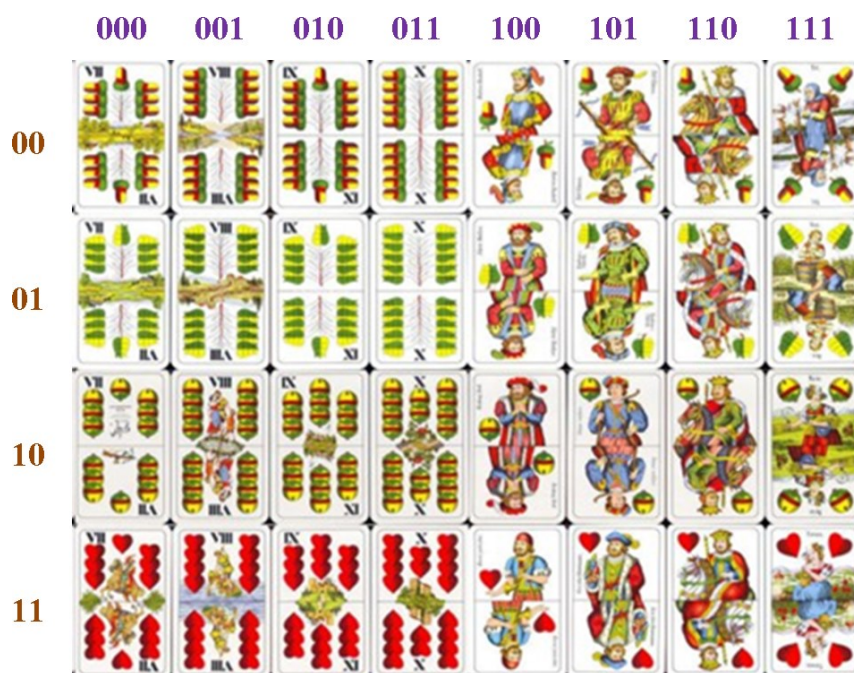
3 Frontálna demonštrácia hry s paralelným hádaním kariet

Ďalej učiteľ uvedie, že pri hádaní karty žiaci svoje otázky prispôbovali výsledkom predchádzajúcich odpovedí. Opýta sa žiakov, či sa dá pomocou rovnakej postupnosti otázok uhádnuť ľubovoľná myslená karta (úloha 3 z pracovného listu).

Potom vyzve žiakov, aby si každý z nich myslel jednu z balíka 32 nemeckých kariet a zapísal ju do pracovného listu (úloha 4). Potom každý žiak zakrúžkuje odpovede typu *áno/nie* na 5 otázok pre svoju myslenú kartu a zakóduje ich pomocou dvojkových číslíc. Učiteľ vyzve niekoľkých (napr. 4) žiakov, aby nahlas prečítali dvojkové kódy svojich kariet. Učiteľ zapíše uvedené kódy na tabuľu a každému kódu pohotovo priradí odpovedajúcu kartu podľa obrázku 3. Následne pomocou schémy na obrázku 2 vysvetlí postup kódovania balíka 32 kariet do dvojkovej sústavy. Ukáže výsledné kódovanie farieb kariet: **Žalud** = 00, **Zeleň** = 01, **Guľa** = 10, **Červeň** = 11 a kódovanie hodnôt kariet: **Sedem** = 000, **Osem** = 001, **Deväť** = 010, **Desať** = 011, **Dolník** = 100, **Horník** = 101, **Kráľ** = 110, **Eso** = 111.

červení, guľa?	viem	červení, zelení?	viem	dolník, horník, kráľ, eso?	viem	9, 10, kráľ, eso?	viem	8, 10, horník, eso?	viem	dvojkový kód	desiatkový kód	
0	žalud', zelení	0	žalud'	0	7, 8, 9, 10	0	7, 8	0	7	00000	0	
						1	9, 10	1	8	00001	1	
				0	dolník, horník, kráľ, eso	0	dolník, horník	0	9	00010	2	
				1	kráľ, eso	1	kráľ	0	10	00011	3	
		0	dolník, horník, kráľ, eso	0	dolník	0	dolník	00100	4			
		1	horník	1	horník	00101	5					
		0	kráľ, eso	0	kráľ	00110	6					
		1	eso	1	eso	00111	7					
	1	zelení	0	zelení	0	7, 8, 9, 10	0	7, 8	0	7	01000	8
							1	9, 10	1	8	01001	9
					0	dolník, horník, kráľ, eso	0	dolník	0	9	01010	10
					1	kráľ, eso	1	10	01011	11		
			0	dolník, horník, kráľ, eso	0	dolník	0	dolník	01100	12		
			1	horník	1	horník	01101	13				
			0	kráľ, eso	0	kráľ	01110	14				
			1	eso	1	eso	01111	15				
1	guľa, červení	0	guľa	0	7, 8, 9, 10	0	7, 8	0	7	10000	16	
						1	9, 10	1	8	10001	17	
				0	dolník, horník, kráľ, eso	0	dolník	0	9	10010	18	
				1	kráľ, eso	1	10	10011	19			
		0	dolník, horník, kráľ, eso	0	dolník	0	dolník	10100	20			
		1	horník	1	horník	10101	21					
		0	kráľ, eso	0	kráľ	10110	22					
		1	eso	1	eso	10111	23					
	1	červení	0	červení	0	7, 8, 9, 10	0	7, 8	0	7	11000	24
							1	9, 10	1	8	11001	25
					0	dolník, horník, kráľ, eso	0	dolník	0	9	11010	26
					1	kráľ, eso	1	10	11011	27		
			0	dolník, horník, kráľ, eso	0	dolník	0	dolník	11100	28		
			1	horník	1	horník	11101	29				
			0	kráľ, eso	0	kráľ	11110	30				
			1	eso	1	eso	11111	31				

Obr. 2 Postup kódovania balíka 32 nemeckých kariet do dvojkovej sústavy.



Obr. 3 Výsledok kódovania balíka 32 nemeckých kariet do dvojkovej sústavy.

Pri súbežnom hádaní štyroch myslených kariet môže učiteľ použiť applet na webovej stránke <http://scratch.mit.edu/projects/18018918/>. Na precvičenie priradenia binárneho kódu kartám slúži úloha 5, ktorá je zameraná na určenie karty so zadaným binárnym kódom.

Učiteľ potom položí žiakom otázku, či majú karty navzájom rôzne kódovanie, či sa nemôže stať, že dvom kartám je priradená rovnaká postupnosť 0/1 (úloha 6 z pracovného listu). Žiaci by sa mali poradiť a podať argumenty o jednoznačnosti takéhoto kódovania. Potom učiteľ zdôrazní súvislosť medzi bitom ako jednotkou informácie a bitom ako binárnou číslicou. Ak by sme namiesto kariet hádali 5-ciferné binárne čísla, tak sa môžeme pýtať postupne na každú cifru tohto čísla. Každá odpoveď nám prinesie informáciu veľkosti 1 bitu.

4 Precvičovanie a zovšeobecňovanie učiva

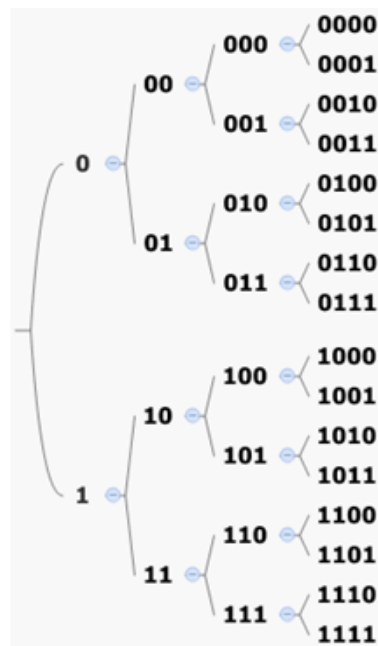
V ďalšej časti hodiny učiteľ uvedie príklad na určenie poradia hráča v turnaji pomocou binárneho stromu. Následne žiaci riešia ďalšie úlohy z pracovného listu smerujúce k precvičeniu, zovšeobecneniu a využitiu rôznych spôsobov kódovania informácií pri riešení praktických problémov.

Príklad určenia poradia hráča v pavúkovom nevylučovacom turnaji

V špeciálnom pavúkovom, ale nevylučovacom turnaji hrá každý zo 16 hráčov postupne 4 duely. Po každom dueli sa rozdelia víťazi a porazení do vlastných skupín, kde hrajú ďalej len medzi sebou. Po prvom dueli osmici víťazov vytvorí jednu skupinu (0) a osmici porazených ďalšiu skupinu (1), v ktorých turnaj pokračuje ďalej. Po druhom dueli víťazi skupiny 0 vytvoria štvorčlennú skupinu 00, porazení skupiny 0 štvorčlennú skupinu 01, víťazi skupiny 1 vytvoria štvorčlennú skupinu 10, porazení skupiny 1 štvorčlennú skupinu 11. Po treťom dueli vzniknú dvojčlenné skupiny a po štvrtom dueli ostanú len jednotlivci.

Veľmi užitočnou vizuálnou pomôckou pri riešení rôznych úloh je binárny strom, pozri obrázok 4. Ukazuje nám spôsob očíslovania výsledkov hráčov, pomocou ktorého vieme určiť ich poradie v dueli:

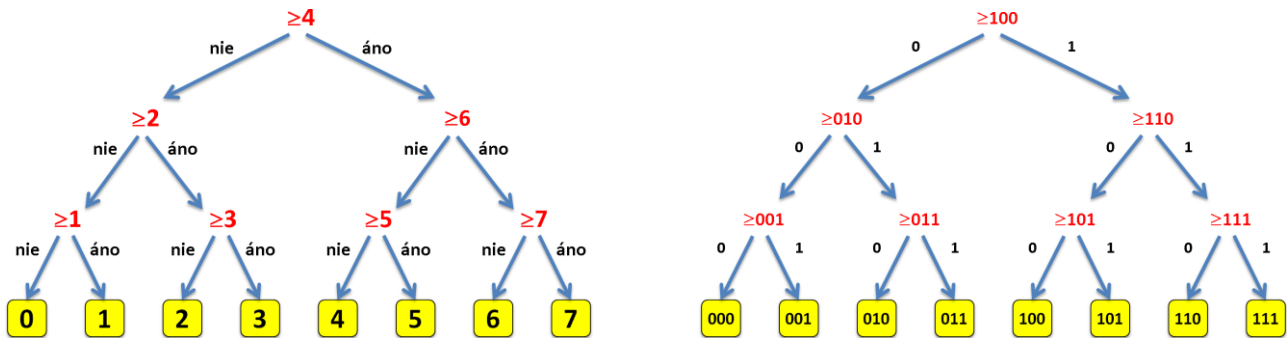
výhra, výhra, výhra, výhra	0000
výhra, výhra, výhra, prehra	0001
výhra, výhra, prehra, výhra	0010
...	
prehra, prehra, prehra, prehra	1111



Obr. 4 Strom s binárnymi číslami

Hra Hádaj celé číslo od 0 do 7

Učiteľ vyzve žiakov zahrať si v dvojiciach hru Hádaj celé číslo od 0 do 7 (úloha 7 z pracovného listu), pričom ich nabáda k vytvoreniu si pomocníka pre hádanie čísla v tvare binárneho stromu. Úlohou žiakov je doplniť do stromu otázky, ktoré budú klásť pri hádaní čísla. Riešene úlohy je vyjadrené vo forme binárneho stromu (obrázok 5). Každá odpoveď na otázku typu *áno/nie* prinesie 1 bit informácie, t. j. 1 binárnu číslicu mysleného čísla.



Obr. 5 Binárny strom pre hádanie celého čísla od 0 do 7 (v dekadickej a binárnej sústave).

V závere úlohy majú žiaci určiť počet otázok pri hádaní celého čísla v rozmedzí $\langle 0, 7 \rangle$ a tiež v alternatívnom, resp. zovšeobecnenom rozmedzí $\langle 1, 8 \rangle$, resp. $\langle 1, 2^K \rangle$.

Hra Hádaj celé číslo od 0 do 15 pomocou kúzelných kariet

Ďalšou precvičujúcou 8. úlohou z pracovného listu je hra Hádaj celé číslo od 0 do 15 pomocou kúzelných kariet (obrázok 6, vľavo). V každej dvojici si jeden žiak myslí číslo a druhému žiakovi podá len tie karty, na ktorých sa nachádza toto číslo. Druhý hráč má zistiť myslené číslo prvého hráča. Prvou podúlohou žiakov je prísť na princíp určenia mysleného čísla pomocou odovzdaných kariet. Nápovedou pre žiakov môže byť prekrytie dolných častí vybraných kariet prstami. Druhou podúlohou je prísť na princíp zostavenia kúzelných kariet. Užitočnou pomôckou pre to sú karty s číslami prevedenými do dvojkovej sústavy (obrázok 6, vpravo).

4. karta	3. karta	2. karta	1. karta	4. karta	3. karta	2. karta	1. karta
8	4	2	1	1000	0100	0010	0001
9	5	3	3	1001	0101	0011	0011
10	6	6	5	1010	0110	0110	0101
11	7	7	7	1011	0111	0111	0111
12	12	10	9	1100	1100	1010	1001
13	13	11	11	1101	1101	1011	1011
14	14	14	13	1110	1110	1110	1101
15	15	15	15	1111	1111	1111	1111

Obr. 6 Kúzelné karty s dekadickým a binárnym zápisom čísel.

Po usmerňujúcich otázkach „*Čo majú spoločné čísla na prvej (druhej ...) karte?*“ žiaci prídu na to, že na prvej (druhej ...) karte sú uvedené čísla, ktoré majú na prvom (druhom ...) mieste sprava

číslicu 1. Myslené číslo sa bude nachádzať len na kartách, na ktorých má v svojom dvojkovom zápise číslice 1. Jeho hodnota v desiatkovej sústave bude súčtom prvých čísel na každej karte obsahujúcim toto myslené číslo. Napríklad číslo 13 sa nachádza na 4., 3. a 1. karte, čo odpovedá jeho dvojkovému zápisu 1101_2 ($1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13$).

Úlohy na určenie veľkosti správ v bitoch týkajúcich sa balíka kariet

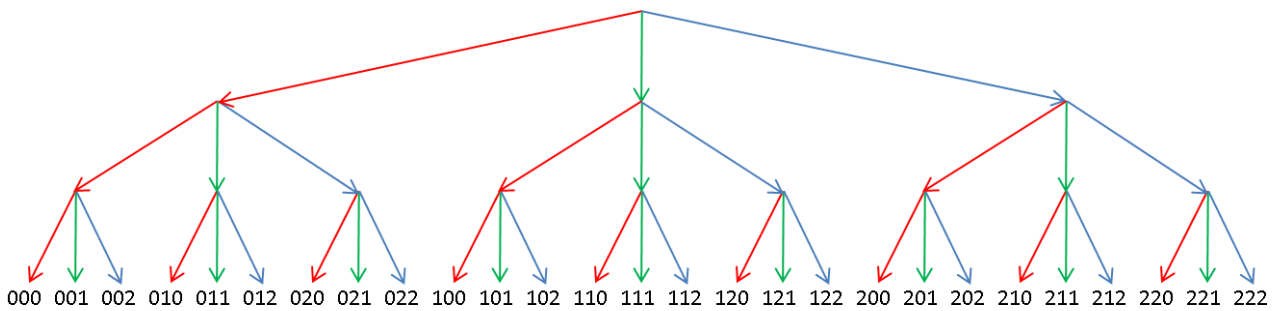
V úlohe 9 z pracovného listu majú žiaci určiť veľkosti jednotlivých správ týkajúcich sa balíka 32 kariet. V rámci heuristického rozhovoru s učiteľom žiaci už riešili obmenu zadaní prvých troch podúloh. Množstvo informácie zo správy chápali ako počet odpovedí na otázky, ktoré zužovali množinu s hľadanou kartou na polovicu. Teraz po skúsenostiach s úlohami 4 až 6 by mohli svoje riešenia odvádzať od toho, koľkými bitmi vieme popísať daný stav, napr. jednu zo 4 čiže 2^2 farieb 2 bitmi, jednu z 8 čiže 2^3 hodnôt kariet 3 bitmi, konkrétnu kartu z balíka 32 čiže 2^5 kariet 5 bitmi. Pri riešení štvrtej podúlohy (správa „Hodnota karty nie je číslo.“) môžeme pristupovať dvoma spôsobmi. Veľkosť správy je 1 bit, lebo správou zúžime množinu s hľadanou kartou na polovicu. Alebo veľkosť správy je 1 bit, lebo správou sme získali 1 binárnu číslicu popisujúcu hodnotu karty $1??$. Podobne pri piatej podúlohe (správa „Hodnota karty je párne číslo.“), veľkosť informácie získanej zo správy sú 2 bity, lebo sme postupne dvakrát zúžili na polovicu množinu s hľadanou kartou (celkovo na štvrtinu) alebo správou sme získali 2 binárne číslice popisujúce hodnotu karty $0?0$. Riešením šiestej a siedmej podúlohy je veľkosť informácie 4 bity, lebo pôvodná množina s hľadanou kartou bola 4-krát zúžená z 32 kariet na 2 karty, t. j. na $1/16$. Iným riešením je pohľad odzadu – potrebujeme ešte získať informáciu 1 bitu, aby sme získali celkovo 5 bitovú informáciu. Napokon v poslednej správe („Farba karty je červená, zelená, žltá alebo biela.“) sme nedostali žiadnu novú informáciu (0 bitov), lebo množina s hľadanou kartou sa po správe nezúžila.

Úloha 10 je na zovšeobecnenie vzťahu medzi počtom položených binárnych otázok na určenie myslenej karty a celkovým počtom N ($N = 2^K$) kariet v balíku, čo je rovnaký výsledok ako v poslednej podúlohe úlohy 6, v ktorej namiesto kariet vystupujú čísla.

Úlohy na určenie veľkosti správ v iných jednotkách ako bitoch

Úlohy 11 až 13 sú zamerané na určenie veľkosti informácií v decitoch a tritoch. V úlohe 11 majú žiaci určiť počet otázok na určenie trojciferného čísla. V prvej podúlohe sa očakáva žiacke riešenie pomocou binárnych otázok. V druhej a tretej podúlohe smerujeme žiakov k odhaleniu jednotky informácie decit, ktorú dostaneme po správe, ktorou zúžime množinu s hľadaným číslom na desatinu. Pomocou 3 decitov (3 dekadických číslic) vieme určiť trojciferné čísla. Úloha 12 je zameraná na objavenie princípu hry s 27 kartami a tiež jednotky informácie trit. Po 3 vyloženiach kariet do 3 stĺpcov, na základe 3 informácií typu *vľavo / stred / vpravo* určíme jednu z balíka 27 čiže 3^3 kariet. Pomocníkom pre vysvetlenie riešenia tejto hry môže byť ternárny strom

zobrazený na obrázku 7 a diagram na obrázku 8 s 3 vyloženiami kariet a 3 zúženiami množiny s myslanou kartou na tretinu.



Obr. 7 Ternárny strom s troma úrovňami hĺbky s číslami zapísanými v trojkovej sústave.

	V				V				V		
	0	1	2		0	1	2		0	1	2
000	0	1	2	10	11	12	120	121	122		
001	0	1	2	10	11	12	100	101	102		
002	0	1	2	10	11	12	110	111	112		
010	0	1	2	00	01	02	000	001	002		
011	0	1	2	00	01	02	010	011	012		
012	0	1	2	00	01	02	020	021	022		
020	0	1	2	20	21	22	200	201	202		
021	0	1	2	20	21	22	210	211	212		
022	0	1	2	20	21	22	220	221	222		
100	0	1	2								
101	0	1	2								
102	0	1	2								
110	0	1	2								
111	0	1	2								
112	0	1	2								
120	0	1	2								
121	0	1	2								
122	0	1	2								
200	0	1	2								
201	0	1	2								
202	0	1	2								
210	0	1	2								
211	0	1	2								
212	0	1	2								
220	0	1	2								
221	0	1	2								
222	0	1	2								

Obr. 8 Ukážka určenia karty z balíka 27 kariet na základe 3 zúžení množiny s hľadanou kartou.

Úloha 13 je na zovšeobecnenie vzťahu medzi počtom položených L -nárnych otázok na určenie myslenej karty a celkovým počtom N ($N = L^K$) kariet v balíku.

5 Celkové zhrnutie a vyhodnotenie prebraného učiva

Na záver vyučovacej jednotky učiteľ zrekapituluje prebrané učivo, pričom žiaci vyplnia (seba)hodnotiace škály k danému učivu (úlohy 14 a 15 v pracovnom liste):

- Bit ako základná jednotka informácie aj ako číslica dvojkovej sústavy.
- Objavenie a aplikovanie algoritmu binárneho vyhľadávania, využitie binárneho stromu.
- Určenie množstva informácie v bitoch v správe týkajúcej sa balíka 32 kariet.
- Zdôvodnenie jednoznačnosti kódovania kariet do binárnych číslic.
- Vzťah medzi počtom položených binárnych otázok na určenie myslenej karty z balíka 2^K kariet a počtom kariet v balíku.
- Súvislosť medzi hĺbkou binárneho stromu a počtom číslic binárneho čísla (resp. počtom položených binárnych otázok).
- *Iné jednotky informácií, napr. trit, decit.

- *Vzťah medzi počtom položených L -nárnych otázok na určenie myslenej karty z balíka L^K kariet a počtom kariet v balíku.

Vedomosti žiakov môže učiteľ preveriť pomocou konceptuálneho testu obsahujúceho, napr. nasledovné úlohy, z ktorých prvých 6 úloh súvisí s balíkom 32 nemeckých kariet:

1. Správa „Farba karty je žalud’.“:
 - a. je 1-bitová, lebo určuje 1 farbu karty,
 - b. je 2-bitová, lebo žalud’ je 1 z 4 čiže 2^2 možných farieb,**
 - c. je 3-bitová, lebo je potrebné položiť ešte 3 otázky na určenie karty,
 - d. je 5-bitová, lebo kariet je spolu 32 čiže 2^5 .
2. Správa „Farba karty je žalud’ alebo guľa.“:
 - a. je 0-bitová, lebo nevieme povedať, ktorú z farieb žalud’/guľa má karta,
 - b. je 1-bitová, lebo sa pôvodná množina kariet zúžila na polovicu,**
 - c. je 2-bitová, lebo sú 4 čiže 2^2 možné farby kariet,
 - d. je 4-bitová, lebo sú 4 možné farby kariet.
3. Správa „Farba karty je žalud’, guľa, zeleň alebo červeň.“:
 - a. je 0-bitová, lebo sme nedostali žiadnu novú informáciu o karte,**
 - b. je 2-bitová, lebo sú 4 čiže 2^2 možné farby kariet,
 - c. je 4-bitová, lebo sú 4 možné farby kariet,
 - d. je 5-bitová, lebo kariet s uvedenými farbami je spolu 32 čiže 2^5 .
4. Správa „Hodnota karty je nepárne číslo.“:
 - a. je 0-bitová, lebo nevieme určiť presne, o akú kartu ide,
 - b. je 1-bitová, lebo sme zúžili pôvodnú množinu kariet na polovicu,
 - c. je 2-bitová, lebo sme zúžili pôvodnú množinu kariet na štvrtinu,**
 - d. je 3-bitová, lebo hodnota karty je jednou z 8 čiže 2^3 možností.
5. Správa „Hodnota karty je desiatka.“:
 - a. je 0-bitová, lebo nevieme určiť farbu karty,
 - b. je 1-bitová, lebo máme informáciu o presnej hodnote karty, nie farby,
 - c. je 2-bitová, lebo potrebujeme ešte zistiť hodnotu jednej zo 4 čiže 2^2 farieb,
 - d. je 3-bitová, lebo uvedená hodnota karty je jednou z 8 čiže 2^3 možností.**
6. Správa „Karta je červená osmička.“:
 - a. je 0-bitová, lebo už poznáme kartu a nepotrebujeme ďalšiu informáciu,
 - b. je 1-bitová, lebo uvedená karta je jedinou kartou z balíka kariet,
 - c. je 2-bitová, lebo vieme 2 informácie – farbu karty a číslo karty,
 - d. je 5-bitová, lebo už poznáme kartu z balíka 32 čiže 2^5 kariet.**
7. Správa „Číslo má dvojkový zápis 1??10.“:

- a. je 0-bitová, lebo nevieme presne určiť hodnotu uvedeného čísla,
 - b. je 2-bitová, lebo potrebujeme zistiť ešte 2 binárne číslice,
 - c. je 3-bitová, lebo poznáme 3 binárne číslice,**
 - d. je 5-bitová, lebo číslo pozostáva z 5 binárnych číslic.
8. Na určenie karty z balíka 2^K kariet potrebujeme položiť najmenej:
- a. 2^K binárnych otázok,
 - b. $2^K - 1$ binárnych otázok,
 - c. 2 binárne otázky,
 - d. K binárnych otázok.**
9. *Správa „Číslo má trojkový zápis 1?2?10.“:
- a. je 0-tritová, lebo nevieme presne určiť hodnotu uvedeného čísla,
 - b. je 2-tritová, lebo potrebujeme zistiť ešte 2 ternárne číslice,
 - c. je 4-tritová, lebo poznáme 4 ternárne číslice,**
 - d. je 6-tritová, lebo číslo pozostáva zo 6 ternárnych číslic.
10. *Na určenie karty z balíka K^2 kariet potrebujeme položiť najmenej:
- a. K^2 binárnych otázok,
 - b. K^2 K -nárnych otázok,
 - c. 2 K -nárne otázky,**
 - d. K binárnych otázok.

4 Pozorovania a zistenia z výučby

Pozorovania a zistenia z výučby autora metodiky

Vybrané úlohy z predloženej metodiky sme overovali na viacerých cieľových skupinách. V rámci výučby informatickej výchovy (január 2011) žiaci 3. ročníka ZŠ na základe heuristického rozhovoru s učiteľom prišli na metódu vyhľadávania „orezávaj a hľadaj“ a boli schopní aplikovať túto metódu pri hľadaní slov v slovníku Pravidiel slovenského pravopisu (obmena úlohy 1). Veľmi dôležité bolo zobrazenie pokusov žiakov (na tabuli) s postupne sa zužujúcou množinou s hľadaným slovom. Úlohu 7 s upraveným rozmedzím celých čísel na $\{1, \dots, 15\}$ žiaci vyriešili pomocou učiteľom poskytnutého pavúka (binárneho stromu) s číslami, a to postupným dopytovaním sa na hľadané číslo s ternárnou odpoveďou (*uber/uhádol si/pridaj*). Pomôcku pavúka žiaci prijali s veľkým záujmom aj vďaka motivácii jeho použitia doma pri hádaní mysleného čísla ich rodičov. Niektorí žiaci poznali zobrazenie pavúka z tenisových turnajov.

V rámci odborného-relaxačného popoludnia finálového kola súťaže PALMA junior v júni 2013 boli formou demonštrácie a heuristického rozhovoru realizované úlohy 4 a 6 zamerané na určenie myslenej karty súbežne 4 žiakom z balíka 32 kariet a zdôvodnenie jednoznačnosti kódovania týchto

kariet do dvojkovej sústavy. Úlohu 8 zameranú na zistenie princípu spôsobu uhádnutia celého čísla pomocou kúzelných kariet vyriešili všetky tímy súťažiacich.

Na informatickom krúžku na našej fakulte v roku 2011 dvaja žiaci 9. ročníka ZŠ riešili náročnejšiu obmenu úlohy 8 zameranú na zistenie princípu kúzelných kariet zostavených na základe kódovania v trojkovej sústave, pri ktorej prišli na princíp 1. a 3. karty. Na základe tejto skúsenosti sme doplnili do úlohy 8 pomôcku vo forme kariet s číslami prevedenými do dvojkovej sústavy. V roku 2013 žiaci 5. – 9. ročníka ZŠ úspešne vyriešili úlohu 8. Jeden žiak 5. ročníka naprogramoval túto hru v prostredí Scratch podľa pracovných listov s odstupňovanou pomocou uvedených v prílohe metodiky.

Vo vysokoškolskej príprave učiteľov informatiky v rámci predmetu Didaktika informatiky boli v priebehu viacerých rokov overené úlohy 1, 4, 8, 12 realizované formou kúziel s balíkom 32, resp. 27 kariet a 4 kúzelnými kartami s číslami. V roku 2010 študentka učiteľstva informatiky na základe jedného z mikrovýstupov vytvorila edukačné video prezentujúce priebeh a vysvetlenie kúzla s balíkom 27 kariet (úloha 12)¹. Veľmi zaujímavé bolo experimentovanie študentov s väčším počtom kariet ako 27, pri ktorom im prekvapivo postačovali 3 ternárne odpovede pri hľadaní jednej z 30 kariet. Až následná spoločná diskusia využívajúca ternárny strom a aspekt pravdepodobnosti im osvetlila riešenie tejto úlohy. Tieto kúzla s balíkmi 32 a 27 kariet boli úspešne realizované a prediskutované so študentmi učiteľstva informatiky v rámci prednáškových pobytov v Poľsku na PgF TU v Radom (2009) a v Česku na FPHaPg TU v Liberci (2013) a na PgF OU v Ostrave (2015).

V rámci predmetu Didaktika informatiky v novembri 2014 študenti rozširujúceho štúdia informatiky riešili úlohy 1, 3 a 4 z pracovného listu. Po vyriešení týchto úloh sme spoločne prediskutovali ich riešenia z pohľadu učiteľa. Prekvapivo len 3 zo 14 študentov uviedli optimálne riešenie úlohy 1 zameranej na uvedenie zoznamu otázok na určenie karty z balíka 32 kariet. Vo väčšine riešení boli správne položené dve otázky na určenie farby karty. Pri určovaní hodnoty karty boli uvádzané menej očakávané otázky, napr. „Je to v tzv. nižšej sfére?“, „V ktorej je sfére?“, „Je na nej mužská postava?“, „Je najvyššia?“. Prvú časť úlohy 4 zameranú na prepis binárnych odpovedí do dvojkového kódu vyriešili správne všetci až na jedného študenta. Druhú časť úlohy 4 zameranú na vyznačenie časti dvojkového kódu pre farbu a hodnotu správne určila polovica študentov. Na dotazníkové otázky odpovedala len polovica počtu študentov, ktorí uviedli, že úlohy boli pre nich zaujímavé s primeranou náročnosťou.

¹ M. Diheneščíková: Edukačné video kúzla s balíkom 27 nemeckých kariet
http://di.ics.upjs.sk/prace/2010/magisterske/dihenescikova/kuzlo_s_kartami.flv

Pozorovania a zistenia z výučby učiteľov gymnázií

V období september–november 2014 na 4 gymnáziách zapojených do projektu VEMIV realizovalo 5 učiteľov výučbu témy Bit – jednotka informácie podľa metodiky zo septembra 2014. Pôvodne navrhovaný 45-minútový rozsah výučby tejto témy umožnil vyriešiť len časť úloh uvedených v metodike. Učítelia sa sústredili vo výučbe hlavne na úlohy uvedené v žiackych pracovných listoch (pokrývajúce v súčasnej verzii pracovného listu úlohy 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10).

Vo výučbe sa využívali rôzne organizačné formy, hlavne práca v dvojiciach a heuristický rozhovor. Učítelia využili z metodiky obrázky a diagramy pri zadávaní úloh, zdôvodňovaní tvrdení a zhrnutí učiva (napr. tabuľku na obrázku 2 pri úlohách 4 a 6). Jedna učiteľka nepoužila pracovný list v predloženej podobe, aby sa neovplyvnilo riešenie úlohy 3, ktoré súvisí so zadaním nasledovnej 4. úlohy. V dvoch triedach prišlo žiakom na um vyriešiť aj duálnu úlohu k úlohe 4, a to určiť kartu podľa zadaného binárneho kódu. Na základe týchto skúsenosti sme doplnili do pracovného listu niektoré obrázky, oddelili na rôzne strany závislé úlohy 3 a 4, doplnili novú úlohu 5 (duálnu k úlohe 4) a ďalšie precvičujúce úlohy, ktoré boli pôvodne uvedené len v metodike. Časovú dotáciu výučby podľa tejto metodiky sme upravili na 90 minút.

Podľa učiteľov aktivity uvedené v metodike žiakov zaujali a nepovažujú ich za náročné. Realizované bádateľské aktivity majú podľa nich pozitívny vplyv na porozumenie osvojovaných poznatkov žiakov, ktorí prejavovali radosť z vlastného objavovania poznatkov. Jeden učiteľ, ktorý v časti výučby hral rolu kúzelníka, uviedol zaujímavú otázku žiačky: „To aj kúzelníci s kartami používajú takúto fintu s binárnymi kódmi?“.

Učítelia uviedli nasledovné spôsobilosti vedeckej práce, ktoré sa u žiakov najviac rozvíjali počas realizácie výučby podľa danej metodiky:

- Identifikovať problém, ktorý sa má skúmať.
- Formulovať hypotézu/teoretický model.
- Vytvárať predpovede týkajúce sa hypotézy/modelu.
- Zbierať, usporiadať a analyzovať dáta – sformulovať princíp alebo zákon/zákonitosť na základe výsledkov experimentu (použitím grafických metód, resp. matematických modelov).
- Formulovať závery na základe dosiahnutých výsledkov.

Na základe žiakmi vyplnených 34 pracovných listov s úlohami 1, 3, 4, 6, 7 môžeme uviesť nasledovné výsledky:

- Úlohu 1, zameranú na uvedenie zoznamu otázok a odpovedí pri hádaní karty z balíka 32 kariet, vyriešilo optimálne len 7 z 33 žiakov. Ostatné riešenia boli nesystematické, neúplné či nesprávne. V niektorých riešeniach boli zbytočne uvedené otázky, ktorých

odpoveď bola zrejmä z predchádzajúcich odpovedí. V iných riešeniach chýbali odpovede na otázky či výsledná karta. V správnych riešeniach sa objavili aj zaujímavé otázky, napr. „Má karta motív, ktorý rastie na stromoch?“ alebo úsporne formulované otázky, napr. „Ž/S?“, „L?“, „>10?“, „J/Q?“ a „A?“. Druhú časť úlohy 1, ktorá požadovala od dvojice žiakov uviesť vylepšené riešenie prvej časti úlohy, riešilo len 20 žiakov. 4 žiaci uviedli všeobecné optimálne riešenie (možno vďaka odpozeraniu zadania úlohy 4), 10 žiakov uviedlo konkrétnu postupnosť 5 otázok zužujúcich množinu s hľadanou kartou na polovice, 5 žiakov uviedlo stratégiu riešenia úlohy (najprv určenie farby, potom hodnoty karty), resp. nedokončili správne rozpracované riešenie a len 1 žiak uviedol nesprávne riešenie. Očakávaná vyššia úspešnosť riešenia druhej časti úlohy potvrdila význam rozdelenia tejto úlohy na dve časti a jej zaradenie pred 4. úlohu.

- V úlohe 3, zameranej na vyjadrenie sa k existencii rovnakej postupnosti otázok pri hádaní ľubovoľného čísla, odpovedalo 15 z 26 žiakov negatívne, t. j. že nevie zostaviť takú postupnosť, ale len 6 z 25 žiakov uviedlo, že takúto postupnosť otázok nie je vôbec možné zostaviť. Očakávali sme vyššiu mieru negatívnych odpovedí na druhú časť úlohy, čo bolo pravdepodobne skreslené nasledujúcou úlohou 4, v ktorej zadaní bola takáto postupnosť otázok uvedená.
- Úlohu 4, zameranú na priradenie binárneho kódu pre vlastnú zadanú kartu pomocou 5 otázok, vyriešilo správne až 33 z 34 žiakov. Podobné výsledky sme očakávali aj v druhej časti úlohy zameranej na vyznačenie častí kódu pre farbu a hodnotu. Túto však správne vyriešilo len 19 žiakov.
- V úlohe 6, zameranej na zdôvodnenie jednoznačnosti kódovania kariet do binárnych čísel, žiaci odpovedali veľmi stručne a nedôsledne. K očakávanej správnej odpovedi sa priblížilo 11 z 34 žiakov, ktorí uviedli, že každá karta má iný binárny kód. Chýbalo im zdôvodnenie jednoznačnosti binárnych kódov, napr. konštrukciou týchto kódov pomocou binárneho stromu.
- Úlohu 7, zameranú na vykreslenie binárneho stromu ako pomôcky pri hádaní celého čísla od 0 do 7, vyriešilo správne 14 z 29 žiakov. Z toho v 4 riešeniach boli namiesto jedného stromu uvedené dva binárne podstromy. V iných 5 riešeniach bol použitý binárny strom na zostavenie trojice otázok – „Je to niektoré z čísel: 4, 5, 6, 7?“, „Je to niektoré z čísel: 2, 3, 6, 7?“, „Je to niektoré z čísel: 1, 3, 5, 7?“. V 6 zo 14 správnych riešení bolo navyše uvedené binárne kódovanie čísel od 0 do 7. V 8 nekompletných riešeniach bol uvedený binárny strom s binárnymi číslicami, ale bez otázok, vedľa neho bolo binárne kódovanie čísel od 0 do 7. V ďalších 7 nekompletných alebo nesprávnych riešeniach nebol uvedený vôbec binárny strom.

- Celkovo sa ukázalo, že niektoré úlohy žiaci neriešili, lebo ich učitelia nezaradili do výučby. Niektoré typy riešení úloh boli charakteristické pre jednotlivé školy, čo môže byť ovplyvnené spôsobom výučby jednotlivých učiteľov. Niektoré úlohy podľa variability ich riešení evidentne neriešili žiaci ako jednotlivci, ale skupinovo.

5 Alternatívy metodiky

Aj keď má metodika svoju jasnú líniu vymedzenú pracovným listom, je na samotnom učiteľovi, aby podľa schopností žiakov a časových možností rozhodol o výbere úloh, miere podpory pre žiakov a miere objavovania poznatkov žiakmi.

Metodiku je možné zúžiť len na jednotku informácie bit bez uvádzania ostatných jednotiek informácie (napr. trit, decit), t. j. vynechať z pracovného listu úlohy 11 – 13 označené hviezdíčkou.

Precvičovaciu etapu môže učiteľ, jednak redukovať, napr. o úlohu 8, jednak rozšíriť o ďalšie úlohy, napr. Určenie životodarných roztokov spomedzi 8 roztokov ich otestovaním na 3 rovnakých kvetinách (je obmenou úlohy 8).

Jednou z možností rozšírenia tejto metodiky je zameranie sa nielen na pochopenie princípu hry Háďaj celé číslo od 0 do 15 pomocou kúzelných kariet, ale aj na vytvorenie užitočného artefaktu – naprogramovanie tejto hry. V prílohe metodiky sú uvedené pracovné listy k programovaniu tejto hry v prostredí Scratch s odstupňovanou pomocou (individuálne poskytnutou učiteľom) spolu s krátkym hodnotiacim dotazníkom.

Ak žiaci poznajú pojem logaritmickej funkcie (od 2. ročníka SŠ), mohli by s určitou mierou pomoci učiteľa objaviť vzťah medzi počtom položených L -nárnych otázok na určenie myslenej karty z balíka kariet a počtom $N = L^K$ kariet ($K = \log_L N$). Žiaci môžu prísť aj na súvislosť medzi počtom číslic L -árneho čísla, hĺbkou L -árneho stromu a logaritmu so základom L .

U talentovaných žiakov, ktorí poznajú pojem pravdepodobnosť, by sme mohli od výrazu $\log_2 N$, určujúceho počet bitov potrebných na určenie jedného z N objektov, prejsť k známej Shannonovej-Hartleyovej formule $I(A) = -\log_2 P(A)$ vyjadrujúcej množstvo informácie získanej zo správy, že nastal jav A s pravdepodobnosťou výskytu $P(A)$. Pomocou tejto formuly môžeme určiť množstvo informácii v správe, ktorá zužuje množinu na ľubovoľnú časť, nielen na polovicu. Napr. po troch negatívnych odpovediach na otázky na farbu karty („Je to zeleň?“, „Je to guľa?“, „Je to žalud’?“) postupne dostaneme informácie s veľkosťou $-\log_2 \frac{3}{4}$, $-\log_2 \frac{2}{3}$, $-\log_2 \frac{1}{2}$ bitov, čo predstavuje spolu celkovú informáciu veľkosti $-\log_2 \frac{3}{4} \frac{2}{3} \frac{1}{2}$, čiže 2 bity. Ďalším rozšírením metodiky by mohlo byť zavedenie a precvičenie pojmu entropie (ako miery neurčitosti výskytu určitého javu) a výpočtov entropie pravdepodobnostných polí s rôznymi javmi.