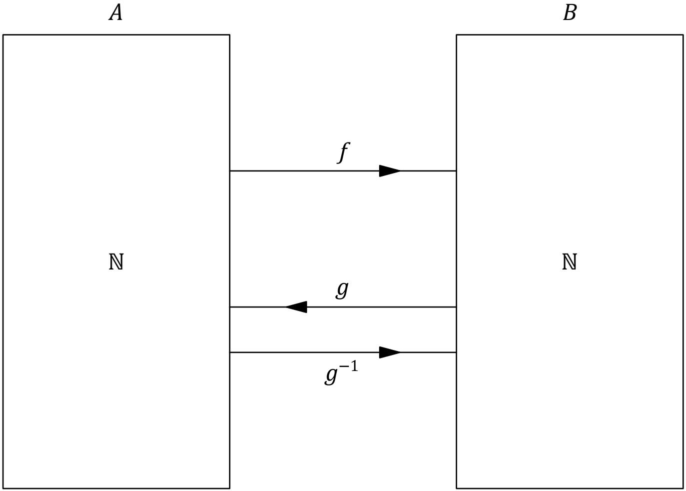
11

NEKONEČNÁ

Cantorova-Bernsteinova veta

- ak $f : A \overset{1-1}{\to} B$ a $g : B \overset{1-1}{\to} A$, tak existuje h taká, že $h : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B$
- výsledná h vznikne postupnými úpravami g^{-1} pomocou f
- príklad:
  - nech $A = B = \mathbb{N}$, $f(n) = 3n$ a $g(n) = 2n$

Cantorova-Bernsteinova veta

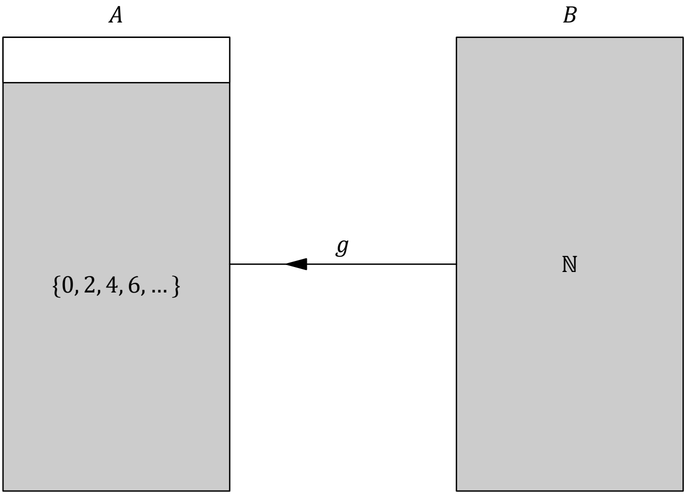
- 

Cantorova-Bernsteinova veta

- ak $f : A \xrightarrow{1-1} B$ a $g : B \xrightarrow{1-1} A$, tak existuje h taká, že $h : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B$
- výsledná h vznikne postupnými úpravami g^{-1} pomocou f
- príklad:
  - nech $A = B = \mathbb{N}$, $f(n) = 3n$ a $g(n) = 2n$
  - potom $\mathrm{dom}(g^{-1}) = \mathrm{rng}(g) = \{0, 2, 4, 6, \dots\} = [0]_{\equiv_2}$, $\mathrm{rng}(g^{-1}) = \mathrm{dom}(g) = \mathbb{N}$ a platí $g^{-1}(2n) = n$

Cantorova-Bernsteinova veta

•

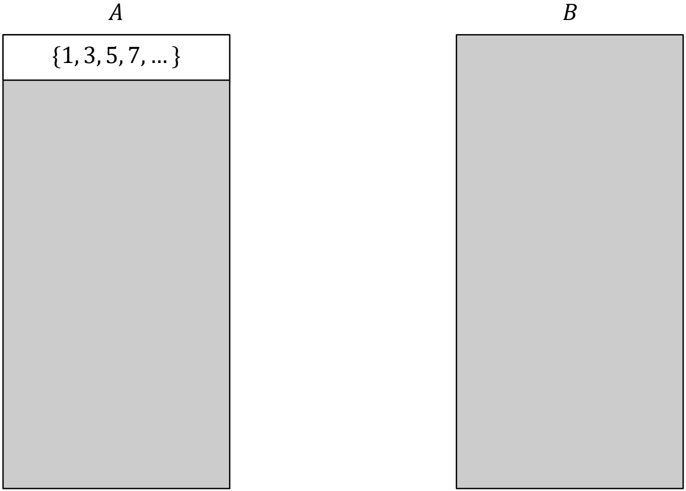


Cantorova-Bernsteinova veta

- ak $f : A \overset{1-1}{\to} B$ a $g : B \overset{1-1}{\to} A$, tak existuje h taká, že $h : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B$
- výsledná h vznikne postupnými úpravami g^{-1} pomocou f
- príklad:
  - nech $A = B = \mathbb{N}$, $f(n) = 3n$ a $g(n) = 2n$
  - potom $\mathrm{dom}(g^{-1}) = \mathrm{rng}(g) = \{0, 2, 4, 6, \dots\} = [0]_{\equiv_2}$, $\mathrm{rng}(g^{-1}) = \mathrm{dom}(g) = \mathbb{N}$ a platí $g^{-1}(2n) = n$
  - prvky z A nepokryté g,
    t. j. z množiny $(A \setminus \mathrm{rng}(g)) = \{1, 3, 5, 7, \dots\} = [1]_{\equiv_2}$,
    nie sú zobrazené pomocou g^{-1},

Cantorova-Bernsteinova veta

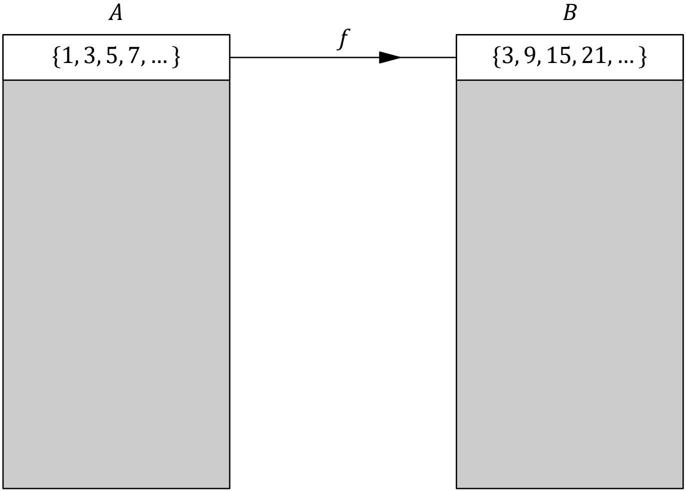
-



Cantorova-Bernsteinova veta

- ak $f : A \xrightarrow{1-1} B$ a $g : B \xrightarrow{1-1} A$, tak existuje h taká, že $h : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B$
- výsledná h vznikne postupnými úpravami g^{-1} pomocou f
- príklad:
  - nech $A = B = \mathbb{N}$, $f(n) = 3n$ a $g(n) = 2n$
  - potom $\mathrm{dom}(g^{-1}) = \mathrm{rng}(g) = \{0, 2, 4, 6, \dots\} = [0]_{\equiv_2}$,
    $\mathrm{rng}(g^{-1}) = \mathrm{dom}(g) = \mathbb{N}$ a platí $g^{-1}(2n) = n$
  - prvky z A nepokryté g,
    t. j. z množiny $(A \setminus \mathrm{rng}(g)) = \{1, 3, 5, 7, \dots\} = [1]_{\equiv_2}$,
    nie sú zobrazené pomocou g^{-1},
    musíme ich preto zobraziť pomocou f

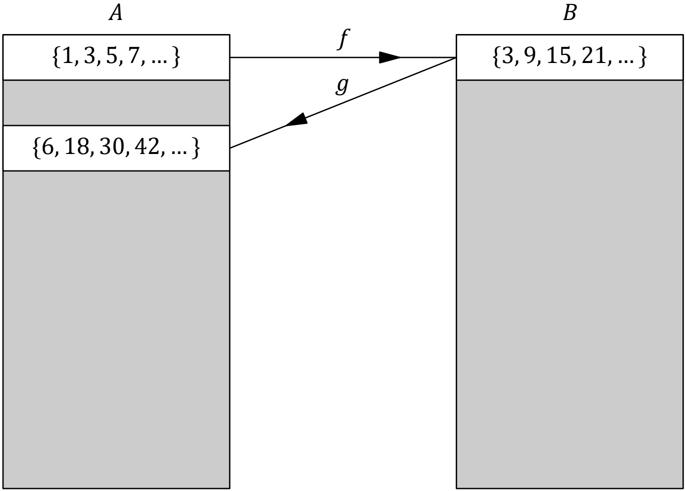
Cantorova-Bernsteinova veta

- 

Cantorova-Bernsteinova veta

- ak $f : A \xrightarrow{1-1} B$ a $g : B \xrightarrow{1-1} A$, tak existuje h taká, že $h : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B$
- výsledná h vznikne postupnými úpravami g^{-1} pomocou f
- príklad:
  - nech $A = B = \mathbb{N}$, $f(n) = 3n$ a $g(n) = 2n$
  - potom $\mathrm{dom}(g^{-1}) = \mathrm{rng}(g) = \{0, 2, 4, 6, \dots\} = [0]_{\equiv_2}$,
    $\mathrm{rng}(g^{-1}) = \mathrm{dom}(g) = \mathbb{N}$ a platí $g^{-1}(2n) = n$
  - prvky z A nepokryté g,
    t. j. z množiny $(A \setminus \mathrm{rng}(g)) = \{1, 3, 5, 7, \dots\} = [1]_{\equiv_2}$,
    nie sú zobrazené pomocou g^{-1},
    musíme ich preto zobraziť pomocou f
  - funkcia f tým však v B „obsadila“ funkcii g^{-1}
    jej obrazy z $f[[1]_{\equiv_2}] = \{3, 9, 15, 21, \dots\} = [3]_{\equiv_6}$,
    takže ich vzory z $g[[3]_{\equiv_6}] = \{6, 18, 30, 42, \dots\} = [6]_{\equiv_{12}}$

Cantorova-Bernsteinova veta

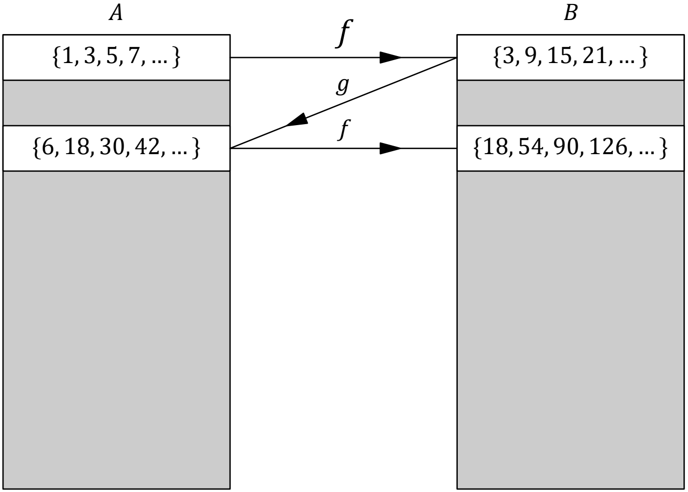
- 

Cantorova-Bernsteinova veta

- ak $f : A \overset{1-1}{\to} B$ a $g : B \overset{1-1}{\to} A$, tak existuje h taká, že $h : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B$
- výsledná h vznikne postupnými úpravami g^{-1} pomocou f
- príklad:
  - nech $A = B = \mathbb{N}$, $f(n) = 3n$ a $g(n) = 2n$
  - potom $\mathrm{dom}(g^{-1}) = \mathrm{rng}(g) = \{0, 2, 4, 6, \dots\} = [0]_{\equiv_2}$,
    $\mathrm{rng}(g^{-1}) = \mathrm{dom}(g) = \mathbb{N}$ a platí $g^{-1}(2n) = n$
  - prvky z A nepokryté g,
    t. j. z množiny $(A \setminus \mathrm{rng}(g)) = \{1, 3, 5, 7, \dots\} = [1]_{\equiv_2}$,
    nie sú zobrazené pomocou g^{-1},
    musíme ich preto zobraziť pomocou f
  - funkcia f tým však v B „obsadila“ funkcii g^{-1}
    jej obrazy z $f[[1]_{\equiv_2}] = \{3, 9, 15, 21, \dots\} = [3]_{\equiv_6}$,
    takže ich vzory z $g[[3]_{\equiv_6}] = \{6, 18, 30, 42, \dots\} = [6]_{\equiv_{12}}$
    musíme zobraziť pomocou f

Cantorova-Bernsteinova veta

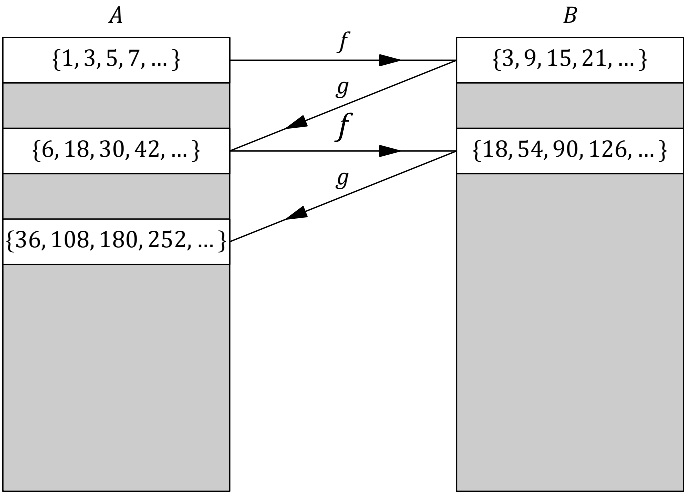
-



Cantorova-Bernsteinova veta

- ak $f : A \overset{1-1}{\to} B$ a $g : B \overset{1-1}{\to} A$, tak existuje h taká, že $h : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B$
- výsledná h vznikne postupnými úpravami g^{-1} pomocou f
- príklad:
  - nech $A = B = \mathbb{N}$, $f(n) = 3n$ a $g(n) = 2n$
  - potom $\mathrm{dom}(g^{-1}) = \mathrm{rng}(g) = \{0, 2, 4, 6, \dots\} = [0]_{\equiv_2}$,
    $\mathrm{rng}(g^{-1}) = \mathrm{dom}(g) = \mathbb{N}$ a platí $g^{-1}(2n) = n$
  - prvky z A nepokryté g,
    t. j. z množiny $(A \setminus \mathrm{rng}(g)) = \{1, 3, 5, 7, \dots\} = [1]_{\equiv_2}$,
    nie sú zobrazené pomocou g^{-1},
    musíme ich preto zobraziť pomocou f
  - funkcia f tým však v B „obsadila" funkcii g^{-1}
    jej obrazy z $f[[1]_{\equiv_2}] = \{3, 9, 15, 21, \dots\} = [3]_{\equiv_6}$,
    takže ich vzory z $g[[3]_{\equiv_6}] = \{6, 18, 30, 42, \dots\} = [6]_{\equiv_{12}}$
    musíme zobraziť pomocou f
  - funkcia f tým však v B „obsadila" funkcii g^{-1}
    jej obrazy z $f[[6]_{\equiv_{12}}] = \{18, 54, 90, 126, \dots\} = [18]_{\equiv_{36}}$,
    takže ich vzory z $g[[18]_{\equiv_{36}}] = \{36, 108, 180, 252, \dots\} = [36]_{\equiv_{72}}$

Cantorova-Bernsteinova veta

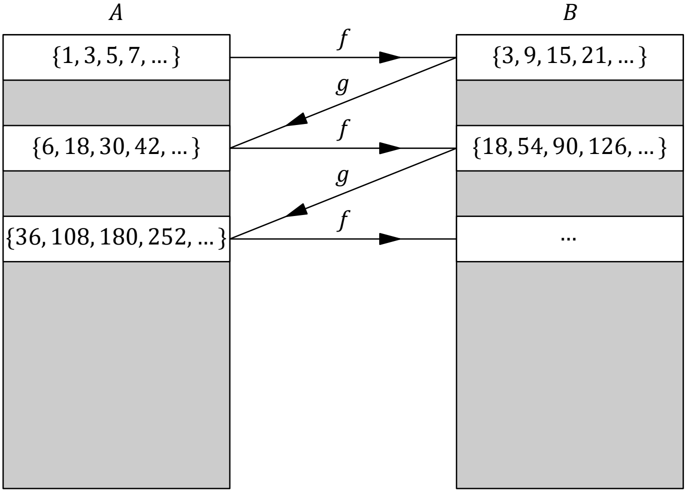
- 

Cantorova-Bernsteinova veta

- ak $f : A \overset{1-1}{\to} B$ a $g : B \overset{1-1}{\to} A$, tak existuje h taká, že $h : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B$
- výsledná h vznikne postupnými úpravami g^{-1} pomocou f
- príklad:
  - nech $A = B = \mathbb{N}$, $f(n) = 3n$ a $g(n) = 2n$
  - potom $\mathrm{dom}(g^{-1}) = \mathrm{rng}(g) = \{0, 2, 4, 6, \dots\} = [0]_{\equiv_2}$,
    $\mathrm{rng}(g^{-1}) = \mathrm{dom}(g) = \mathbb{N}$ a platí $g^{-1}(2n) = n$
  - prvky z A nepokryté g,
    t. j. z množiny $(A \setminus \mathrm{rng}(g)) = \{1, 3, 5, 7, \dots\} = [1]_{\equiv_2}$,
    nie sú zobrazené pomocou g^{-1},
    musíme ich preto zobraziť pomocou f
  - funkcia f tým však v B „obsadila" funkcii g^{-1}
    jej obrazy z $f[[1]_{\equiv_2}] = \{3, 9, 15, 21, \dots\} = [3]_{\equiv_6}$,
    takže ich vzory z $g[[3]_{\equiv_6}] = \{6, 18, 30, 42, \dots\} = [6]_{\equiv_{12}}$
    musíme zobraziť pomocou f
  - funkcia f tým však v B „obsadila" funkcii g^{-1}
    jej obrazy z $f[[6]_{\equiv_{12}}] = \{18, 54, 90, 126, \dots\} = [18]_{\equiv_{36}}$,
    takže ich vzory z $g[[18]_{\equiv_{36}}] = \{36, 108, 180, 252, \dots\} = [36]_{\equiv_{72}}$
    musíme zobraziť pomocou f

Cantorova-Bernsteinova veta

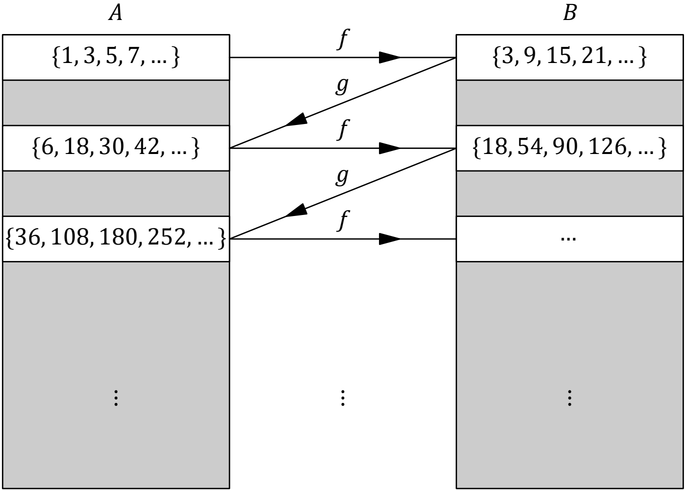
•



Cantorova-Bernsteinova veta

- ak $f : A \overset{1-1}{\to} B$ a $g : B \overset{1-1}{\to} A$, tak existuje h taká, že $h : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B$
- výsledná h vznikne postupnými úpravami g^{-1} pomocou f
- príklad:
  - nech $A = B = \mathbb{N}$, $f(n) = 3n$ a $g(n) = 2n$
  - potom $\mathrm{dom}(g^{-1}) = \mathrm{rng}(g) = \{0, 2, 4, 6, \dots\} = [0]_{\equiv_2}$,
    $\mathrm{rng}(g^{-1}) = \mathrm{dom}(g) = \mathbb{N}$ a platí $g^{-1}(2n) = n$
  - prvky z A nepokryté g,
    t. j. z množiny $(A \setminus \mathrm{rng}(g)) = \{1, 3, 5, 7, \dots\} = [1]_{\equiv_2}$,
    nie sú zobrazené pomocou g^{-1},
    musíme ich preto zobraziť pomocou f
  - funkcia f tým však v B „obsadila“ funkcii g^{-1}
    jej obrazy z $f[[1]_{\equiv_2}] = \{3, 9, 15, 21, \dots\} = [3]_{\equiv_6}$,
    takže ich vzory z $g[[3]_{\equiv_6}] = \{6, 18, 30, 42, \dots\} = [6]_{\equiv_{12}}$
    musíme zobraziť pomocou f
  - funkcia f tým však v B „obsadila“ funkcii g^{-1}
    jej obrazy z $f[[6]_{\equiv_{12}}] = \{18, 54, 90, 126, \dots\} = [18]_{\equiv_{36}}$,
    takže ich vzory z $g[[18]_{\equiv_{36}}] = \{36, 108, 180, 252, \dots\} = [36]_{\equiv_{72}}$
    musíme zobraziť pomocou f
  - a tak ďalej

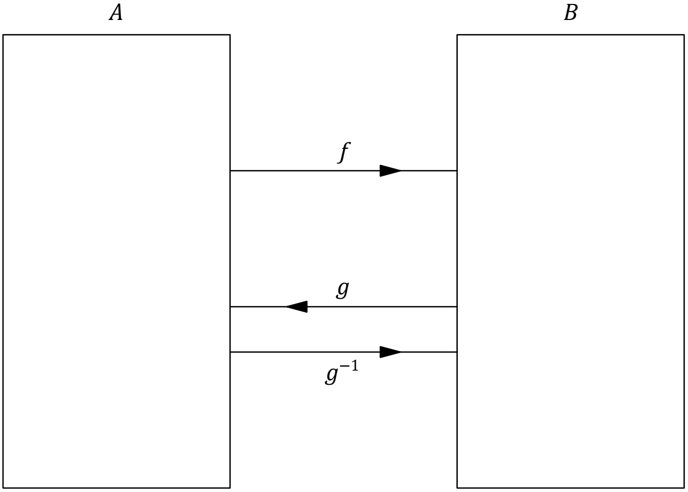
Cantorova-Bernsteinova veta

- 

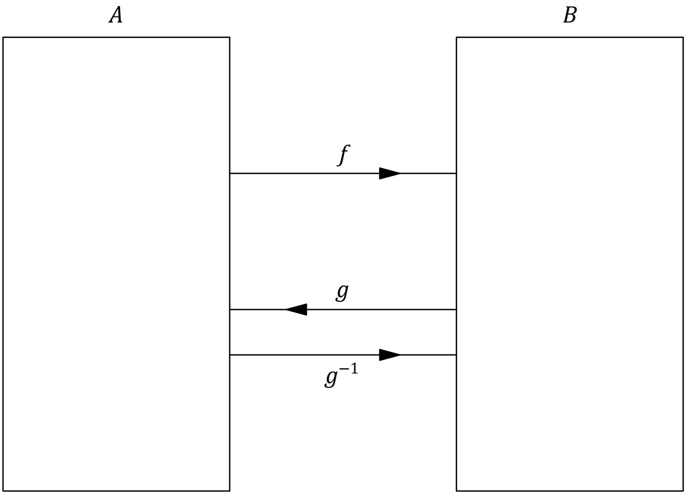
Cantorova-Bernsteinova veta

- všeobecne
  - prvky z A nepokryté g,
    t. j. z množiny $M = A \setminus \mathrm{rng}(g)$,
    nie sú zobrazené pomocou g^{-1},
    musíme ich preto zobraziť pomocou f
  - funkcia f tým však v B „obsadila“ funkcii g^{-1}
    jej obrazy z $f[M]$,
    takže ich vzory z $g[f[M]] = (f \circ g)[M]$
    musíme zobraziť pomocou f
  - funkcia f tým však v B „obsadila“ funkcii g^{-1}
    jej obrazy z $f[(f \circ g)[M]]$,
    takže ich vzory z $g[f[(f \circ g)[M]]] = (f \circ g)[(f \circ g)[M]] = (f \circ g)^{(2)}[M]$
    musíme zobraziť pomocou f
  - funkcia f tým však v B „obsadila“ funkcii g^{-1}
    jej obrazy z $f[(f \circ g)^{2}[M]]$,
    takže ich vzory z $g[f[(f \circ g)^{(2)}[M]]] = (f \circ g)[(f \circ g)^{(2)}[M]] = (f \circ g)^{(3)}[M]$
    musíme zobraziť pomocou f
  - a tak ďalej

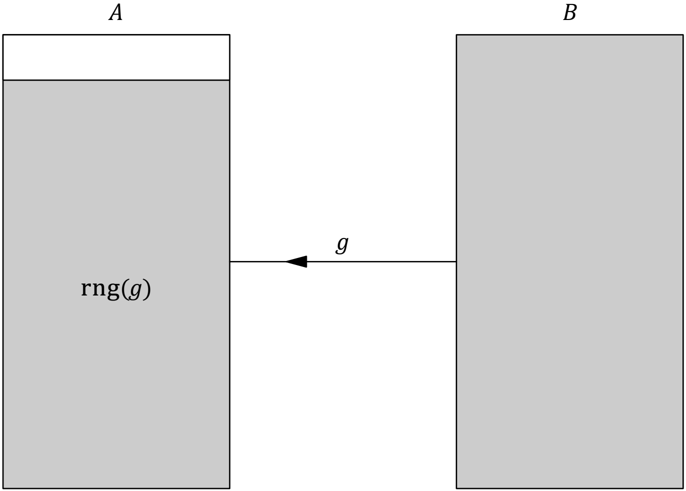
Cantorova-Bernsteinova veta



Cantorova-Bernsteinova veta

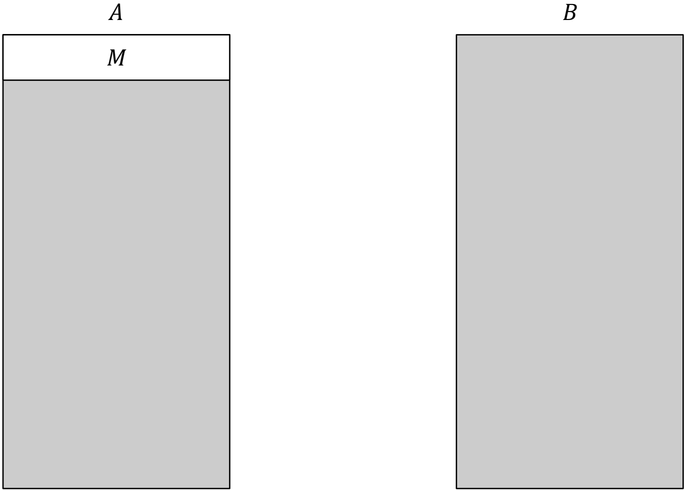
- 

Cantorova-Bernsteinova veta

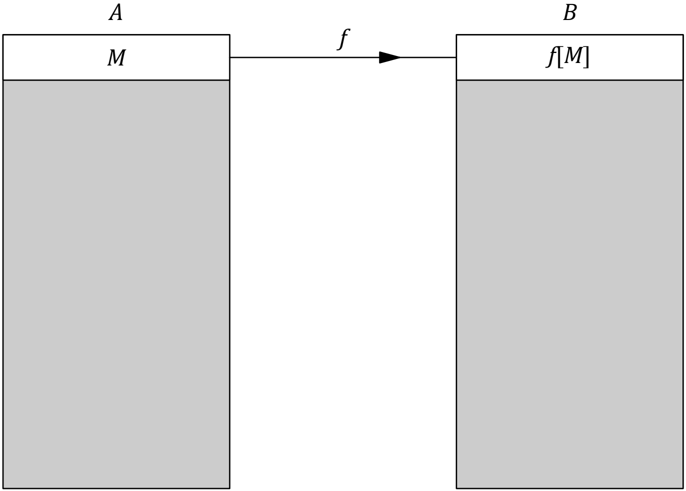
- 

Cantorova-Bernsteinova veta

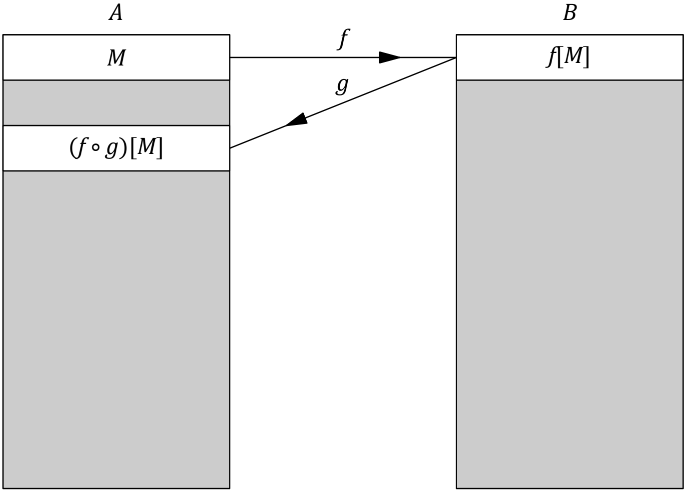
-



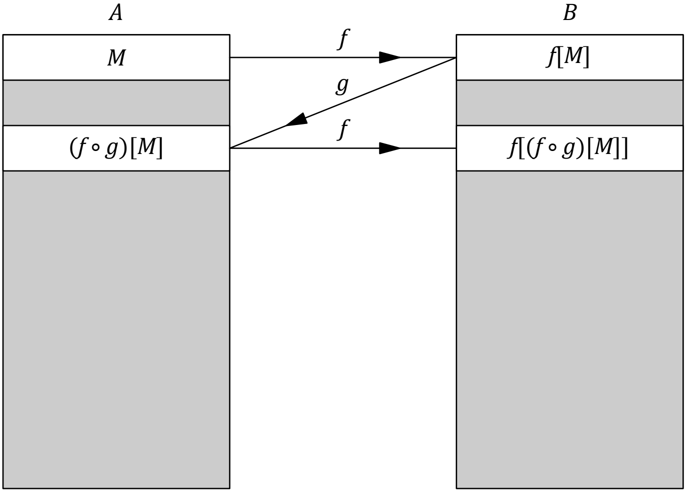
Cantorova-Bernsteinova veta

- 

Cantorova-Bernsteinova veta

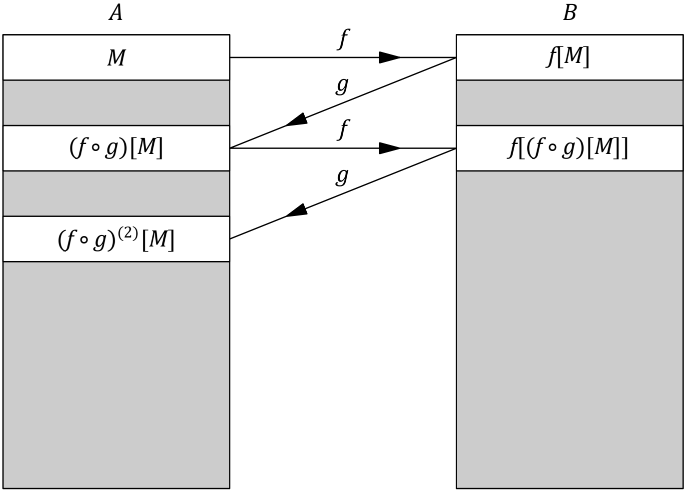
- 

Cantorova-Bernsteinova veta

- 

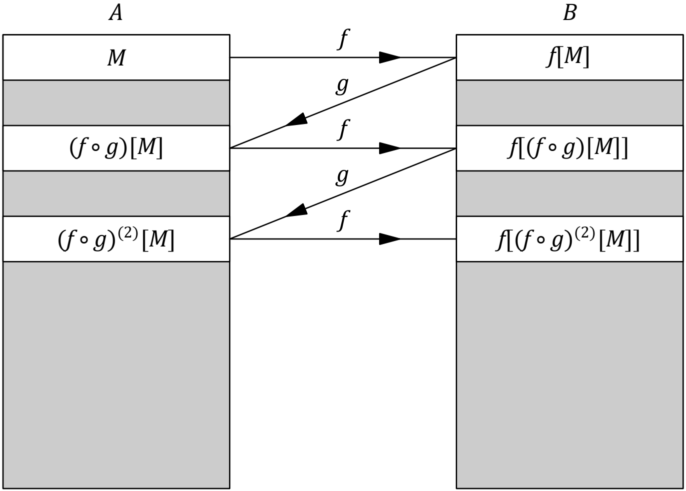
Cantorova-Bernsteinova veta

-

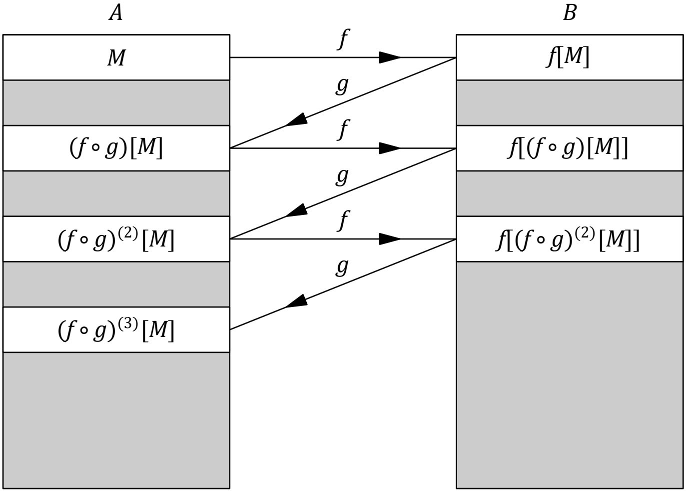


Cantorova-Bernsteinova veta

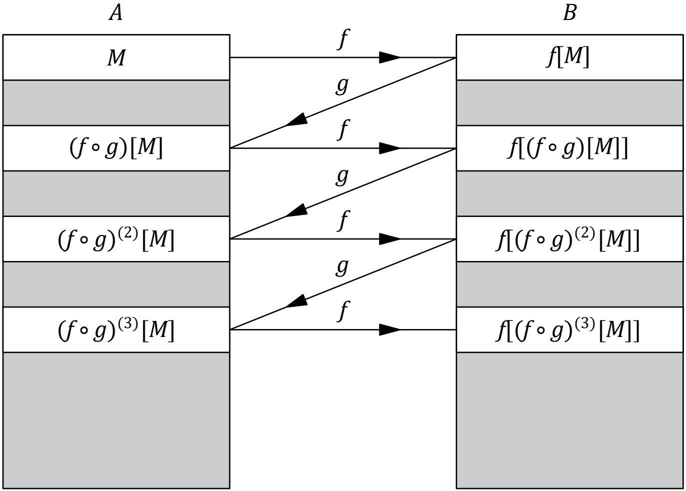
-



Cantorova-Bernsteinova veta

- 

Cantorova-Bernsteinova veta

- 

dôkaz Cantorovej-Bernsteinovej vety

- platí $(f \circ g) : A \to A$
- definujme množinu S vzťahom

$$S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left((f \circ g)^{(n)} [A \setminus \mathrm{rng}(g)] \right)$$

- definujme funkciu h z A do B vzťahom

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ak } x \in S \\ g^{-1}(x), & \text{ak } x \notin S \end{cases}$$

- o h ukážeme, že je to injekcia a surjekcia na B, takže bude platiť $h : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B$

dôkaz Cantorovej-Bernsteinovej vety

- h je injekcia:
  - nech $h(x_1) = h(x_2)$ a $x_1, x_2 \in S$
    - potom $f(x_1) = h(x_1) = h(x_2) = f(x_2)$
    - keďže f je injekcia, platí $x_1 = x_2$
  - nech $h(x_1) = h(x_2)$ a $x_1, x_2 \notin S$
    - potom $g^{-1}(x_1) = h(x_1) = h(x_2) = g^{-1}(x_2)$
    - keďže g^{-1} je injekcia, platí $x_1 = x_2$
  - nech $h(x_1) = h(x_2)$ a $x_1 \in S, x_2 \notin S$
    - potom $f(x_1) = h(x_1) = h(x_2) = g^{-1}(x_2)$
    - potom $(f \circ g)(x_1) = g(f(x_1)) = g(g^{-1}(x_2)) = x_2$
    - keďže $x_1 \in S$, platí $x_1 \in (f \circ g)^{(n)}[A \setminus \mathrm{rng}(g)]$ pre nejaké $n \in \mathbb{N}$
    - potom však
    $$x_2 = (f \circ g)(x_1) \in$$
    $$\in (f \circ g)[(f \circ g)^{(n)}[A \setminus \mathrm{rng}(g)]] = (f \circ g)^{(n+1)}[A \setminus \mathrm{rng}(g)],$$
    a teda $x_2 \in S$, čo je spor

dôkaz Cantorovej-Bernsteinovej vety

- h je surjekcia na B:
  - nech $y \in B$ a $g(y) \notin S$
    - potom $h(g(y)) = g^{-1}(g(y)) = y$
    - takže $y \in \mathrm{rng}(h)$
  - nech $y \in B$ a $g(y) \in S$
    - potom $g(y) \in (f \circ g)^{(n)}[A \setminus \mathrm{rng}(g)]$ pre nejaké $n \in \mathbb{N}$
    - takže existuje $x \in A \setminus \mathrm{rng}(g)$, že $g(y) = (f \circ g)^{(n)}(x)$
    - keďže $g(y) \notin A \setminus \mathrm{rng}(g) = (f \circ g)^{(0)}[A \setminus \mathrm{rng}(g)]$, platí $n \neq 0$, t. j. $n > 0$
    - nech $z = (f \circ g)^{(n-1)}(x)$
    - potom
    $$g(f(z)) = (f \circ g)(z) =$$
    $$= (f \circ g)((f \circ g)^{(n-1)}(x)) = (f \circ g)^{(n)}(x) = g(y)$$
    - keďže g je injekcia, platí $f(z) = y$
    - keďže $z \in S$, platí $h(z) = f(z) = y$
    - takže $y \in \mathrm{rng}(h)$

mohutnosti číselných množín

- $\text{card}(\mathbb{N}) = \aleph$
- $\text{card}(\mathbb{Z}) = \aleph$
- $\text{card}(\mathbb{Q}) = \aleph$
- platí aj $\text{card}(\mathbb{R}) = \aleph$?
- existuje vôbec nejaká nekonečná množina, ktorá by nebola spočítateľná?

Cantorova diagonála

- množina $(0, 1)$ je zrejme nekonečná,
  predpokladajme, že je spočítateľná
- nech teda existuje bijekcia f z $\mathbb{N}$ do $(0, 1)$
- každé číslo z $(0, 1)$ má desatinný zápis v tvare „0, … “
- ak je tento zápis konečný (pri desatinných číslach),
  doplníme ho nulami
- niektoré čísla majú dva rôzne takéto zápisy
  (napríklad $\frac{1}{2} = 0{,}5\overline{0} = 0{,}4\overline{9}$),
  sú to práve desatinné čísla;
  v jednom zápise je $\overline{0}$ a v druhom $\overline{9}$, uprednostníme ten prvý

Cantorova diagonála

- nech naša f vyzerá napríklad takto:

n	$f(n)$
0	0,12539563...
1	0,37462538...
2	0,34729383...
3	0,50000000...
4	0,77777777...
5	0,11223344...
6	0,21542362...
7	0,51345637...
$\vdots$	$\vdots$

- v prvom stĺpci sú všetky čísla z $\mathbb{N}$,
  v druhom všetky čísla z $(0, 1)$

Cantorova diagonála

- zo zápisu každého čísla vyberme cifru z diagonály:

n	$f(n)$
0	0,12539563...
1	0,37462538...
2	0,34729383...
3	0,50000000...
4	0,77777777...
5	0,11223344...
6	0,21542362...
7	0,51345637...
⋮	⋮ ⋱

- ak pred takto vzniknutý zápis ešte predpíšeme „0,“, dostávame desatinný zápis nejakého čísla (v našom prípade 0,17707367...)
- každú cifru tohto čísla po čiarke zmeňme (nie však na 0 či 9), napríklad:
  - ak to nie je 7, zmeňme ju na 7
  - ak to je 7, zmeňme ju na 3
- dostávame tak číslo (v našom prípade 0,73373773...), ktorého zápis sa líši od každého čísla v tabuľke
- toto číslo je z $(0, 1)$, nie je však v tabuľke – spor!

nespočítateľné množiny

- ukázali sme teda, že $\mathrm{card}((0,1)) \neq \aleph$
- reprezentanta triedy ekvivalencie $[(0,1)]_{\equiv}$ budeme označovať $\mathfrak{c}$ a nazývať **kontinuum**
- takže $\mathrm{card}((0,1)) = \mathfrak{c} \neq \aleph$
- ak $a < b$, tak $\mathrm{card}((a,b)) = \mathfrak{c}$
  - lebo ak $f : (0,1) \to (a,b)$, pričom $f(x) = a + (b-a)x$, tak $f : (0,1) \xrightarrow[\text{na}]{1-1} (a,b)$
- $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$
  - lebo $\mathrm{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{R}$
- ak $a < b$ a M je (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, alebo $[a,b]$, tak $\mathrm{card}(M) = \mathfrak{c}$
  - keďže $(a,b) \subseteq M \subseteq \mathbb{R}$, platí $\mathfrak{c} = \mathrm{card}((a,b)) \trianglelefteq \mathrm{card}(M) \trianglelefteq \mathrm{card}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$, takže $\mathrm{card}(M) = \mathfrak{c}$
- ak $a \in \mathbb{R}$ a M je (a,∞) alebo $[a,\infty)$, tak $\mathrm{card}(M) = \mathfrak{c}$
  - analogicky, ale s intervalom $(a, a+1)$
- ak $a \in \mathbb{R}$ a M je $(-\infty, a)$ alebo $(-\infty, a]$, tak $\mathrm{card}(M) = \mathfrak{c}$
  - analogicky, ale s intervalom $(a-1, a)$

$\mathrm{card}([0,1)^2) = \mathfrak{c}$

- $\mathrm{card}([0,1)^2) \trianglelefteq \mathrm{card}([0,1))$
  - každé číslo z $[0,1)$ má tvar s nekonečným desatinným rozvojom; ak sú možné dva tvary, vyberieme ten s $\overline{0}$, ten s $\overline{9}$ považujme za zakázaný
  - nech f je funkcia z $[0,1) \times [0,1)$ do $[0,1)$ definovaná takto:

$$\begin{aligned} x &= 0{,}x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad \dots \\ y &= 0{,} \quad y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \dots \\ f(\langle x, y\rangle) &= 0{,}x_1y_1x_2y_2x_3y_3x_4y_4 \dots \end{aligned}$$

  - výsledkom nemôže byť číslo so zápisom s $\overline{9}$, lebo to by aj oba vstupy mali zápis s $\overline{9}$; desatinný zápis možného výsledku je teda jednoznačný
  - f je injektívna
  - f nie je surjektívna, lebo napríklad $0{,}\overline{09} \notin \mathrm{rng}(f)$
- $\mathrm{card}([0,1)) \trianglelefteq \mathrm{card}([0,1)^2)$:
  - stačí vziať $g : [0,1) \xrightarrow{1-1} [0,1)^2$, kde $g(x) = \langle x, 0\rangle$
- zhrnutím $\mathrm{card}([0,1)^2) = \mathrm{card}([0,1)) = \mathfrak{c}$
- potom aj $\mathrm{card}(\mathbb{C}) = \mathrm{card}(\mathbb{R}^2) = \mathrm{card}([0,1)^2) = \mathfrak{c}$

usporiadanie kardinálov

- zatiaľ máme dva typy nekonečien:
  - $\aleph = \mathrm{card}(\mathbb{N}) = \mathrm{card}(\mathbb{Z}) = \mathrm{card}(\mathbb{Q})$
  - $\mathfrak{c} = \mathrm{card}(\mathbb{R}) = \mathrm{card}(\mathbb{C})$
- pritom $\aleph \trianglelefteq \mathfrak{c}$, ale nie $\aleph = \mathfrak{c}$
- ak pre kardinály κ a λ platí $\kappa \trianglelefteq \lambda$, ale nie $\kappa = \lambda$, tak budeme písať $\kappa \triangleleft \lambda$
- takže $\aleph \triangleleft \mathfrak{c}$
- ak $n \in \mathbb{N}$, tak $n \triangleleft n+1$ a $n \triangleleft \aleph$
  - $n \trianglelefteq n+1$, resp. $n \trianglelefteq \aleph$
    - lebo $n = \{0, 1, \dots, n-1\} \subseteq \{0, 1, \dots, n-1, n\} = n+1$, resp. $n = \{0, 1, \dots, n-1\} \subseteq \mathbb{N}$
  - $n \neq n+1$, resp. $n \neq \aleph$
    - nech $f : (n+1) \xrightarrow[\text{na}]{1-1} n$, resp. $f : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} n$
    - podľa Dirichletovho princípu medzi $n+1$ číslami $f(0), f(1), \dots, f(n)$ existujú aspoň dve rovnaké
    - teda f nie je injektívna, čo je spor
- $0 \triangleleft 1 \triangleleft 2 \triangleleft \dots \triangleleft \aleph \triangleleft \mathfrak{c}$

iba dve nekonečná?

- existuje nejaký kardinál väčší od $\mathfrak{c}$?
- existuje nejaký kardinál medzi $\aleph$ a $\mathfrak{c}$?

neexistuje najväčšia mohutnosť

- systém všetkých podmnožín množiny X označujeme $\mathrm{P}(X)$
  a nazývame **potenčná množina** množiny X
  - ak $X = \{1, 2, 3\}$,
    tak $\mathrm{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
- $\mathrm{card}(X) \lhd \mathrm{card}(\mathrm{P}(X))$
  - $\mathrm{card}(X) \unlhd \mathrm{card}(\mathrm{P}(X))$, t. j. $X \unlhd \mathrm{P}(X)$:
    - stačí vziať $g : X \xrightarrow{1-1} \mathrm{P}(X)$, kde $g(x) = \{x\}$
  - $\mathrm{card}(X) \neq \mathrm{card}(\mathrm{P}(X))$, t. j. $X \not\equiv \mathrm{P}(X)$:
    - nech $f : X \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathrm{P}(X)$
    - nech $M = \{x \in X : x \notin f(x)\}$
    - keďže $M \in \mathrm{P}(X)$ a f je surjektívna na $\mathrm{P}(X)$,
      existuje x, že $M = f(x)$
    - $x \in M$,
      akk $x \notin f(x)$
      (je to podmienka patrenia do M),
      akk $x \notin M$
      (lebo $f(x) = M$),
      čo je spor
- takže **neexistuje najväčšia mohutnosť**

hypotéza kontinua

- tvrdenie, že v ostrom usporiadaní $\lhd$ je $\mathfrak{c}$ je horným susedom $\aleph$, nazývame **hypotéza kontinua**
- toto tvrdenie je **nerozhodnuteľné** –
  nemožno ho dokázať,
  ale nemožno dokázať ani jeho negáciu
- analogická situácia v teórii grúp:
  platí v grupe komutatívny zákon?;
  v niektorých áno, v niektorých nie
- axiómam teórie množín môže vyhovovať
  viacero skupín objektov;
  (takéto skupiny potom nazývame **modely**)
  v niektorých z nich hypotéza kontinua platí, v iných nie
- ak by sa dala dokázať, platila by v každej skupine,
  ale ak by sa dala dokázať jej negácia, neplatila by v žiadnej