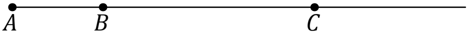
10
MOHUTNOSTI

rovnako veľké množiny

- ako sa delia dve malé deti o cukríky?;
  mne jeden, tebe jeden, mne jeden, tebe jeden, ...;
  hoci možno ani **nevedia zistiť, kto koľko** cukríkov dostal,
  majú záruku, že obe ich dostali **rovnako**
- deti cukríky **popárujú**,
  a tak vlastne nevedomky **vytvoria bijekciu**
  z množiny „mojich“ cukríkov do množiny „tvojich“ cukríkov
- ak sú prvky dvoch konečných množín popárované,
  počet jedných je zároveň počtom druhých,
  takže obe množiny vtedy majú **rovnaký počet prvkov**
- bijekcia je teda prirodzený koncept
  na uchopenie rovnakej veľkosti
- ak medzi dvoma množinami nájdeme bijekciu,
  budeme ich považovať za **rovnako veľké**
- platí to aj pre nekonečné množiny?

rozpor dvoch prirodzených princípov

- dva prirodzené princípy:
  1. **zhodné objekty sú rovnako veľké**
  2. **časť** (vlastná podmnožina) **je menšia ako celok**
- tieto dva princípy sú **nezlúčiteľné**:



  - polpriamky AC a BC (ako každé dve polpriamky) sú zhodné, podľa 1. princípu sú teda rovnako veľké
  - polpriamka BC je vlastnou podmnožinou polpriamky AC, podľa 2. princípu je teda od nej menšia

- intuícia z konečného sveta tu zlyháva
- riešením je zmierniť 2. princíp:
  časť nie je väčšia ako celok,
  pripúšťame teda, že môžu byť rovnako veľké

bijekciová ekvivalencia

- na podmnožinách dostatočne veľkej množiny
  (prípadne triedy všetkých množín)
  definujme reláciu $\equiv$ vzťahom:
  $X \equiv Y$, akk existuje bijekcia z X na Y
- $\equiv$ je ekvivalencia:
  - $\equiv$ je reflexívna:
    - keďže id_X je bijekcia z X na X, platí $X \equiv X$
  - $\equiv$ je symetrická:
    - ak $X \equiv Y$, tak existuje bijekcia f z X na Y
    - potom f^{-1} je bijekcia z Y na X, a teda $Y \equiv X$
  - $\equiv$ je tranzitívna:
    - nech $X \equiv Y$ a $Y \equiv Z$,
      t. j. existuje bijekcia f z X na Y a tiež bijekcia g z Y na Z
    - potom je však $f \circ g$ bijekcia z X na Z, a teda $X \equiv Z$

mohutnosť množiny

- dve množiny teda budú rovnako veľké,
  ak budú z rovnakej triedy ekvivalencie $\equiv$
- pre každé n budú všetky n-prvkové množiny tvoriť jednu triedu
- z každej triedy ekvivalencie $\equiv$ vyberme istého reprezentanta
  (väčšinou bližšie nešpecifikovaného, ale pevného)
- týchto reprezentantov nazývame
  kardinálne čísla alebo **kardinály**;
  obvykle ich označujeme κ, λ, μ, ...
- funkciu, ktorá každej množine priradí
  takéhoto reprezentanta jej triedy ekvivalencie,
  nazveme **mohutnosť** (alebo **kardinalita**)
  a označíme ju card
- namiesto $\mathrm{card}(X)$ sa alternatívne píše aj $|X|$
- platí teda $X \equiv \mathrm{card}(X)$

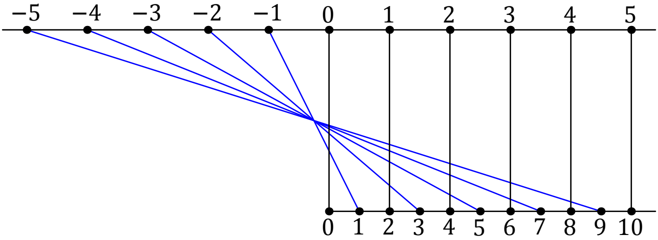
konečné množiny

- jednotlivé prirodzené čísla sú definované takto:
  - 0 je iné meno pre množinu $\emptyset$
  - 1 je iné meno pre množinu $\{0\}$ (t. j. $\{\emptyset\}$)
  - 2 je iné meno pre množinu $\{0, 1\}$ (t. j. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$)
  - 3 je iné meno pre množinu $\{0, 1, 2\}$ (t. j. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$)
  - ...
  - n je iné meno pre množinu $\{0, 1, \ldots, n-1\}$
- množina n má práve n prvkov
- je to teda výborný kandidát na reprezentanta triedy ekvivalencie n-prvkových množín
- ak má konečná množina X n prvkov,
  existuje bijekcia z n do X,
  a teda bude platiť $\mathrm{card}(X) = n$

spočítateľné množiny

- $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ je množina
- nazývame ju **množina** (rozumej **všetkých**) **prirodzených čísel**
- označujeme ju $\mathbb{N}$, ale (v závislosti od kontextu) aj ω, ω_0, $\aleph$, či $\aleph_0$
- množinu nazývame **spočítateľná**, ak existuje bijekcia medzi $\mathbb{N}$ a ňou (alebo, ekvivalentne, ak existuje bijekcia medzi ňou a $\mathbb{N}$)
- všetky spočítateľné množiny tvoria jednu triedu ekvivalencie $\equiv$
- množina $\mathbb{N}$ je dobrým kandidátom na jej reprezentanta
- nekonečná množina X je spočítateľná, akk $\mathrm{card}(X) = \aleph$
- príklady spočítateľných množín:
  - množina $\mathbb{N}^+$
    - lebo funkcia f, kde $f(x) = x + 1$, je bijekciou z $\mathbb{N}$ do nej
  - množina párnych prirodzených čísel
    - lebo funkcia f, kde $f(x) = 2x$, je bijekciou z $\mathbb{N}$ do nej
  - množina nepárnych prirodzených čísel
    - lebo funkcia f, kde $f(x) = 2x + 1$, je bijekciou z $\mathbb{N}$ do nej
  - ľubovoľná nekonečná podmnožina množiny $\mathbb{N}$
    - stačí jej prvky zoradiť do rastúcej postupnosti a očíslovať

$\mathbb{Z}$ je spočítateľná

- 

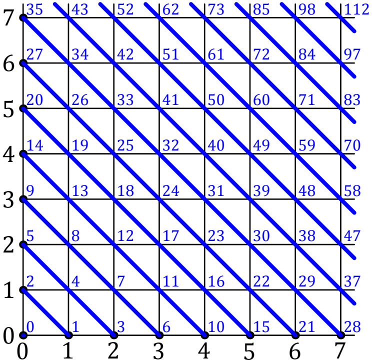
- nech f je funkcia zo $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{N}$ taká, že

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ak } x \geq 0, \\ -2x - 1, & \text{ak } x < 0 \end{cases}$$

$\mathbb{Z}$ je spočítateľná

- f je injekcia:
  - ak $x_1 \geq 0$ a $x_2 < 0$ alebo naopak,
    tak $f(x_1)$ a $f(x_2)$ majú rôznu paritu,
    teda sa nemôžu rovnať
  - ak $x_1 \geq 0$ a $x_2 \geq 0$,
    tak $f(x_1) = f(x_2)$ znamená $2x_1 = 2x_2$,
    z čoho $x_1 = x_2$
  - ak $x_1 < 0$ a $x_2 < 0$,
    tak $f(x_1) = f(x_2)$ znamená $-2x_1 - 1 = -2x_2 - 1$,
    z čoho $x_1 = x_2$
- f je surjekcia na $\mathbb{N}$:
  - ak $n = 2k$ pre nejaké $k \in \mathbb{N}$,
    tak $f(k) = 2k = n$
  - ak $n = 2k + 1$ pre nejaké $k \in \mathbb{N}$,
    tak $f(-k - 1) = -2(-k - 1) - 1 = 2k + 1 = n$
- f je teda hľadaná bijekcia zo $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{N}$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je spočítateľná

- 

- označme t_m číslo $\frac{1}{2}m(m+1)$
- $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 3, t_3 = 6, t_4 = 10, t_5 = 15, \ldots$
- na obrázku sú to práve označenia bodov na vodorovnej osi, sú to tzv. **trojuholníkové čísla**
- $t_{m+1} - t_m = \frac{1}{2}(m+1)(m+2) - \frac{1}{2}m(m+1) = m + 1 > 0$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je spočítateľná

- nech f je funkcia z $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ taká, že $f(x,y) = t_{x+y} + y$
- $x + y = m$, akk $t_m \leq f(x,y) < t_{m+1}$
- f je injekcia:
  - nech $f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) = n$
  - nech m je jediné také, že $t_m \leq n < t_{m+1}$
  - takže $x_1 + y_1 = m = x_2 + y_2$
  - potom $t_m + y_1 = f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) = t_m + y_2$, z čoho $y_1 = y_2$, a teda aj $x_1 = x_2$
- f je surjekcia na $\mathbb{N}$:
  - nech $n \in \mathbb{N}$
  - nech m je jediné také, že $t_m \leq n < t_{m+1}$
  - nech $y = n - t_m$, zrejme $0 \leq y \leq m$, a $x = m - y$, zrejme $0 \leq x$
  - potom $x + y = m$, z čoho $f(x,y) = t_{x+y} + y = t_m + y = n$
  - takže $n \in \mathrm{rng}(f)$
- f je teda hľadaná bijekcia z $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$
- (každú) bijekciu z $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$ nazývame **párujúca funkcia**

súčinová bijekcia

- ak $A \equiv B$ a $C \equiv D$, tak $(A \times C) \equiv (B \times D)$
  - nech $f : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B$ a $g : C \xrightarrow[\text{na}]{1-1} D$
  - nech $h : (A \times C) \to (B \times D)$, kde $h(\langle a, c\rangle) = \langle f(a), g(c)\rangle$
  - h je injekcia:
    - $h(\langle a_1, c_1\rangle) = h(\langle a_2, c_2\rangle)$,
      ztv $\langle f(a_1), g(c_1)\rangle = \langle f(a_2), g(c_2)\rangle$,
      akk $f(a_1) = f(a_2)$ a $g(c_1) = g(c_2)$,
      akk $a_1 = a_2$ a $c_1 = c_2$,
      (lebo f a g sú injektívne),
      akk $\langle a_1, c_1\rangle = \langle a_2, c_2\rangle$
  - h je surjekcia na $B \times D$:
    - nech $\langle b, d\rangle \in B \times D$
    - keďže f je surjektívna na B, existuje $a \in A$, že $f(a) = b$;
      keďže g je surjektívna na D, existuje $c \in C$, že $g(c) = d$
    - potom $h(\langle a, c\rangle) = \langle f(a), g(c)\rangle = \langle b, d\rangle$, takže $\langle b, d\rangle \in \mathrm{rng}(h)$
  - h je teda hľadaná bijekcia z $A \times C$ na $B \times D$
- ak $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$ a $\mathrm{card}(C) = \mathrm{card}(D)$,
  tak $\mathrm{card}(A \times C) = \mathrm{card}(B \times D)$

ďalšie spočítateľné množiny

- ak $\mathrm{card}(A) = \aleph$ a $n > 0$, tak aj $\mathrm{card}(A^n) = \aleph$
  1° podľa predpokladu $\mathrm{card}(A^1) = \mathrm{card}(A) = \aleph$
  2° podľa indukčného predpokladu $\mathrm{card}(A^n) = \aleph = \mathrm{card}(\mathbb{N})$,
  takže $\mathrm{card}(A^{n+1}) = \mathrm{card}(A^n \times A) = \mathrm{card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \aleph$
- **ak $n > 0$, tak $\mathrm{card}(\mathbb{N}^n) = \aleph$**
  - špeciálny prípad predchádzajúceho tvrdenia
- **súčin spočítateľných množín je spočítateľná množina**
  - ak $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B) = \aleph = \mathrm{card}(\mathbb{N})$,
    tak $\mathrm{card}(A \times B) = \mathrm{card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \aleph$
- $\mathrm{card}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = \aleph$
  - špeciálny prípad predchádzajúceho tvrdenia
- $\mathrm{card}(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+) = \aleph$
  - špeciálny prípad predchádzajúceho tvrdenia

ďalšie spočítateľné množiny?

- je $\mathbb{Q}$ spočítateľná?
  - nech $f : \mathbb{Q} \to (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+)$, kde $f(\frac{x}{y}) = \langle x, y \rangle$,
    ale iba ak je $\frac{x}{y}$ základný tvar
  - f je injekcia
    - lebo zápis v tvare zlomku určuje číslo jednoznačne
  - f však nie je surjekcia na $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+$,
    lebo napríklad $\langle 2, 4 \rangle \notin \mathrm{rng}(f)$, keďže $f(\frac{2}{4}) = f(\frac{1}{2}) = \langle 1, 2 \rangle$

ďalšie spočítateľné množiny?

- nech A^* označuje $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$, t. j. triedu všetkých tíc prvkov A
- je $\mathbb{N}^*$ spočítateľná?
  - nech $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}, f(\langle x_1, \ldots, x_n \rangle) = 1 \cdot \mathrm{p}_0^{x_1+1} \cdot \mathrm{p}_1^{x_2+1} \cdots \mathrm{p}_{n-1}^{x_n+1}$
    (pričom $\mathrm{p}_0 = 2, \mathrm{p}_1 = 3, \mathrm{p}_2 = 5, \mathrm{p}_3 = 7, \mathrm{p}_4 = 11, \ldots$
    t. j. sú to do (jedinej) rastúcej postupnosti zoradené prvočísla)
    - $f(\langle 2, 0, 1 \rangle) = 1 \cdot 2^{2+1} \cdot 3^{0+1} \cdot 5^{1+1} = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 = 600$
    - $f(\langle \rangle) = 1$
  - f je injekcia
    - vyplýva to zo základnej vety aritmetiky
  - f však nie je surjekcia na $\mathbb{N}$
    (lebo napríklad $0 \notin \mathrm{rng}(f)$ alebo $10 \notin \mathrm{rng}(f)$)
- ak A je spočítateľná, je aj A^* spočítateľná?
  - nech $b : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{N}$
  - nech $g : A^* \to \mathbb{N}$, kde
    $g(\langle x_1, \ldots, x_n \rangle) = 1 \cdot \mathrm{p}_0^{b(x_1)+1} \cdot \mathrm{p}_1^{b(x_2)+1} \cdots \mathrm{p}_{n-1}^{b(x_n)+1}$
  - g je injekcia
    - vyplýva to zo základnej vety aritmetiky
  - g však nie je surjekcia na $\mathbb{N}$

porovnávanie veľkosti množín

- definujme reláciu $\trianglelefteq$ takto:
  $X \trianglelefteq Y$, akk existuje injekcia z X do Y
- $\trianglelefteq$ je predusporiadanie:
  - $\trianglelefteq$ je reflexívna:
    - napríklad id_X je injekcia z X do X,
      takže $X \trianglelefteq X$
  - $\trianglelefteq$ je tranzitívna:
    - nech $X \trianglelefteq Y$ a $Y \trianglelefteq Z$,
      t. j. existuje injekcia z X do Y a injekcia z Y do Z
    - ich zložením je injekcia z X do Z,
      takže $X \trianglelefteq Z$
- **ak $X \subseteq Y$, tak $X \trianglelefteq Y$**
  - lebo napríklad id_X je injekcia z X do Y
- $\trianglelefteq$ však nie je usporiadanie, lebo nie je antisymetrická:
  ak $X \trianglelefteq Y$ a $Y \trianglelefteq X$, tak zrejme nemusí platiť $X = Y$;
  platí aspoň $X \equiv Y$?

usporiadanie mohutností

- **$X \trianglelefteq Y$ a $Y \trianglelefteq X$, akk $X \equiv Y$**
  - $\boxed{\rightarrow}$
    - **Cantorova-Bernsteinova veta** (dôkaz v ďalšej prednáške)
  - $\boxed{\leftarrow}$
    - ak $X \equiv Y$, tak existuje bijekcia f z X do Y
    - potom $f : X \overset{1-1}{\rightarrow} Y$ a $f^{-1} : Y \overset{1-1}{\rightarrow} X$,
      takže $X \trianglelefteq Y$ a $Y \trianglelefteq X$
- $\trianglelefteq$ je usporiadanie kardinálov:
  - vieme už, že $\trianglelefteq$ je predusporiadanie,
    špeciálne kardinálov
  - $\trianglelefteq$ je na kardináloch antisymetrické
    - nech $\kappa_1 \trianglelefteq \kappa_2$ a $\kappa_2 \trianglelefteq \kappa_1$
    - potom $\kappa_1 \equiv \kappa_2$,
      takže množiny κ_1 a κ_2 patria do tej istej triedy ekvivalencie $\equiv$
    - keďže sú obe jej reprezentantmi, platí $\kappa_1 = \kappa_2$
- **$X \trianglelefteq Y$, akk $\mathrm{card}(X) \trianglelefteq \mathrm{card}(Y)$**
  - prechod od predusporiadania k usporiadaniu

$\mathbb{Q}$ je spočítateľná

- $\mathrm{card}(\mathbb{Q}) \trianglelefteq \mathrm{card}(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+) = \aleph$,
  lebo (ako už vieme) existuje injekcia z $\mathbb{Q}$ do $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+$
- $\aleph = \mathrm{card}(\mathbb{N}) \trianglelefteq \mathrm{card}(\mathbb{Q})$,
  lebo $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$
- z toho už dostávame, že $\mathrm{card}(\mathbb{Q}) = \aleph$

množina tíc zo spočítateľnej množiny je spočítateľná

- nech A je spočítateľná
- $\mathrm{card}(A^*) \trianglelefteq \mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph$,
  lebo (ako už vieme) existuje injekcia z A^* do $\mathbb{N}$
- $\aleph = \mathrm{card}(A) \trianglelefteq \mathrm{card}(A^*)$,
  lebo $A = A^1 \subseteq A^*$
- z toho už dostávame, že $\mathrm{card}(A^*) = \aleph$
- špeciálne $\mathrm{card}(\mathbb{N}^*) = \aleph$