9

FUNKCIE

funkcia

- reláciu R nazveme **zobrazenie** alebo **funkcia**,
  ak platí
  $$((\langle x, y_1 \rangle \in R) \wedge (\langle x, y_2 \rangle \in R)) \rightarrow (y_1 = y_2)$$
- príklady relácií, ktoré nie sú funkciami:
  - $\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$
    (nie je splnená podmienka definície pre $x = 1, y_1 = 2, y_2 = 3$)
  - $\{\langle \text{Jano}, 180\,\text{cm} \rangle, \langle \text{Fero}, 182\,\text{cm} \rangle, \langle \text{Jano}, 178\,\text{cm} \rangle\}$
    (podmienka neplatí pre $x = \text{Jano}, y_1 = 180\,\text{cm}, y_2 = 178\,\text{cm}$)

príklady

- $\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$
- $\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,3\rangle\}$
- $\{\langle\heartsuit,1\rangle,\langle\diamondsuit,2\rangle,\langle\clubsuit,3\rangle,\langle\spadesuit,4\rangle\}$
- $\{\langle$Jano, 180 cm$\rangle,\langle$Fero, 182 cm$\rangle,\langle$Ďuro, 178 cm$\rangle\}$
- $\{\langle x,x+1\rangle : x\in\mathbb{N}\}$
- $\{\langle x,2x\rangle : x\in\mathbb{N}\}$
- $\{\langle\langle x,y\rangle,x+y\rangle : x,y\in\mathbb{N}\}$
- id_A pre ľubovoľnú triedu A
- $\emptyset$
- sin,
  cos,
  exp,
  log
- stredová súmernosť (podľa daného stredu),
  osová súmernosť (podľa danej osi),
  posunutie,
  otáčanie

hodnoty a argumenty funkcie

- ak f je funkcia a $\langle x, y\rangle \in f$,
  tak namiesto (jednoznačne určeného) y píšeme $f(x)$
- $f(x) = y$ teda znamená $\langle x, y\rangle \in f$
- $f(x)$ nazývame **hodnota** alebo **výstup** funkcie f **v bode** x
- príklady:
  - ak $f = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$,
    tak $f(1) = 2$ a $f(2) = 3$
  - ak $g = \{\langle \heartsuit, 1\rangle, \langle \diamondsuit, 2\rangle, \langle \clubsuit, 3\rangle, \langle \spadesuit, 4\rangle\}$,
    tak napríklad $g(\heartsuit) = 1$
  - ak výška $= \{\langle \text{Jano}, 180\text{ cm}\rangle, \langle \text{Fero}, 182\text{ cm}\rangle, \langle \text{Ďuro}, 178\text{ cm}\rangle\}$,
    tak napríklad výška(Jano) $= 180$ cm
  - ak $f = \{\langle x, 2x\rangle : x \in \mathbb{N}\}$,
    tak napríklad $f(0) = 0$, $f(5) = 10$ či $f(100) = 200$
  - ak súčet $= \{\langle\langle x, y\rangle, x + y\rangle : x, y \in \mathbb{N}\}$,
    tak súčet$(\langle 2, 3\rangle) = 5$ a súčet$(\langle 2, 0\rangle) = 2$
- namiesto $f(\langle x_1, \dots, x_n\rangle)$ píšeme $f(x_1, \dots, x_n)$
  a $x_1, \dots, x_n$ nazývame **argumenty** alebo **vstupy** funkcie f
  - súčet$(2, 3) = 5$

prvé a druhé zložky

- nech relácia f na súčine $A \times B$ je funkcia
- ak $Y \subseteq B$, tak

$$\begin{aligned} f^{-1}[Y] &= \{x \in A : (\exists y \in Y)\langle x, y\rangle \in f\} \\ &= \{x \in A : (\exists y \in Y) f(x) = y\} \\ &= \{x \in A : f(x) \in Y\} \end{aligned}$$

- platí teda

$$f(x) \in Y \leftrightarrow x \in f^{-1}[Y]$$

- ak $X \subseteq A$, tak

$$\begin{aligned} f[X] &= \{y \in B : (\exists x \in X)\langle x, y\rangle \in f\} \\ &= \{y \in B : (\exists x \in X) f(x) = y\} \\ &= \{f(x) : x \in X\} \end{aligned}$$

- platí teda

$$x \in X \to f(x) \in f[X]$$

  (nie však naopak)

definičný obor

- nech relácia f na súčine $A \times B$ je funkcia
- triedu $f^{-1}[B]$ nazývame **definičný obor** funkcie f a označujeme ju $\mathrm{dom}(f)$ (alebo $\mathrm{D}(f)$)
- platí teda
$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(f) &= \{x \in A : (\exists y \in B)\langle x, y\rangle \in f\} \\ &= \{x \in A : (\exists y \in B) f(x) = y\} \end{aligned}$$
- definičný obor funkcie je teda trieda prvých zložiek všetkých jej prvkov
- príklady:
    - ak $f = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$, tak $\mathrm{dom}(f) = \{1, 2\}$
    - ak $f = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$, tak $\mathrm{dom}(f) = \{1, 2\}$
    - ak $\text{nasledovník} = \{\langle x, x+1\rangle : x \in \mathbb{N}\}$, tak $\mathrm{dom}(\text{nasledovník}) = \{x : x \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$
    - $\mathrm{dom}(\sin) = \mathbb{R}$
    - $\mathrm{dom}(\log) = \mathbb{R}^+$
    - $\mathrm{dom}(\mathrm{tg}) = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$

obor hodnôt

- nech relácia f na súčine $A \times B$ je funkcia
- triedu $f[A]$ nazývame **obor hodnôt** funkcie f a označujeme ju $\mathrm{rng}(f)$ (alebo $\mathrm{H}(f)$)
- platí teda

$$\begin{aligned} \mathrm{rng}(f) &= \{y \in B : (\exists x \in A)\langle x, y\rangle \in f\} \\ &= \{y \in B : (\exists x \in A) f(x) = y\} \\ &= \{f(x) : x \in \mathrm{dom}(f)\} \end{aligned}$$

- obor hodnôt funkcie je teda trieda druhých zložiek všetkých jej prvkov
- príklady:
  - ak $f = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$, tak $\mathrm{rng}(f) = \{f(1), f(2)\} = \{2, 3\}$
  - ak $f = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$, tak $\mathrm{rng}(f) = \{f(1), f(2)\} = \{3\}$
  - ak $\mathrm{nasledovník} = \{\langle x, x+1\rangle : x \in \mathbb{N}\}$, tak $\mathrm{rng}(\mathrm{nasledovník}) = \{x + 1 : x \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^+$
  - $\mathrm{rng}(\sin) = [-1, 1]$
  - $\mathrm{rng}(\log) = \mathbb{R}$

funkcia z triedy do triedy

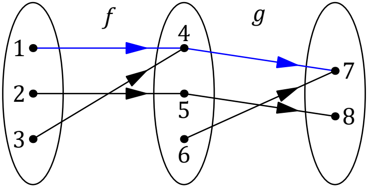
- ak f je funkcia a $\mathrm{dom}(f) = A$ a $\mathrm{rng}(f) \subseteq B$,
  píšeme $f : A \to B$
  a hovoríme, že f je **funkcia z** triedy A **do** triedy B
- príklady:
  - ak $f = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$,
    tak $f : \{1,2\} \to \{2,3\}$,
    ale aj $f : \{1,2\} \to \{1,2,3\}$
    alebo $f : \{1,2\} \to \mathbb{N}$,
    nie však $f : \{1,2\} \to \{1,2\}$
  - ak $\text{nasledovník} = \{\langle x, x+1\rangle : x \in \mathbb{N}\}$,
    tak $\text{nasledovník} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$,
    ale aj $\text{nasledovník} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,
    nie však $\text{nasledovník} : \mathbb{N} \to \{0,1,2,3\}$
  - ak $\text{súčet} = \{\langle\langle x,y\rangle, x+y\rangle : x,y \in \mathbb{N}\}$,
    tak $\text{súčet} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,
    nie však $\text{súčet} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$

zložená funkcia

- ak $f : A \to B$ a $g : B \to C$, tak $f \circ g$ je funkcia z A do C
  a pre každé $a \in A$ platí $(f \circ g)(a) = g(f(a))$
  - keďže $f \subseteq A \times B$ a $g \subseteq B \times C$, platí $(f \circ g) \subseteq A \times C$
  - $(\langle a, c_1 \rangle \in (f \circ g)) \land (\langle a, c_2 \rangle \in (f \circ g))$,
    akk $(\exists b_1 \in B)((\langle a, b_1 \rangle \in f) \land (\langle b_1, c_1 \rangle \in g)) \land$
    $\land (\exists b_2 \in B)((\langle a, b_2 \rangle \in f) \land (\langle b_2, c_2 \rangle \in g))$
    (podľa definície zloženia),
    akk $(\exists b_1 \in B)(f(a) = b_1) \land (g(b_1) = c_1)) \land$
    $\land (\exists b_2 \in B)(f(a) = b_2) \land (g(b_2) = c_2))$
    (lebo f a g sú funkcie),
    ztv $((\exists b_1 \in B)g(f(a)) = c_1) \land ((\exists b_2 \in B)g(f(a)) = c_2)$
    (vlastnosť rovnosti),
    ztv $(g(f(a)) = c_1) \land (g(f(a)) = c_2)$
    (kvantifikátory sú irelevantné),
    akk $g(f(a)) = c_1 = c_2$
    (prepis),
    takže $f \circ g$ je funkcia,
    a ak $a \in \mathrm{dom}(f \circ g)$, tak $(f \circ g)(a) = c_1 = g(f(a))$
  - ak $a \in A = \mathrm{dom}(f)$, tak existuje b z B, že $\langle a, b \rangle \in f$,
    keďže $b \in B = \mathrm{dom}(g)$, existuje c, že $\langle b, c \rangle \in g$;
    takže podľa definície $\langle a, c \rangle \in f \circ g$, a teda $\mathrm{dom}(f \circ g) = A$

zložená funkcia

- príklady:
  - ak $f = \{\langle 1, 4\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 3, 4\rangle\}$ a $g = \{\langle 4, 7\rangle, \langle 5, 8\rangle, \langle 6, 7\rangle\}$,
    tak $f \circ g = \{\langle 1, 7\rangle, \langle 2, 8\rangle, \langle 3, 7\rangle\}$



  - ak $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
    pričom $f(x) = x + 1$ a $g(x) = x^2$,
    tak $(f \circ g)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2$
    a $(g \circ f)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$
  - ak f a g sú osové súmernosti podľa navzájom kolmých osí,
    tak $f \circ g$ je stredová súmernosť podľa priesečníka týchto osí
    a $g \circ f$ je tá istá stredová súmernosť
  - ak f je stredová súmernosť v rovine ϱ, tak $f \circ f = \mathrm{id}_\varrho$
  - ak f a g sú posunutia, tak $f \circ g$ je tiež posunutie
  - ak f a g sú zhodné zobrazenia, tak $f \circ g$ je tiež zhodné zobrazenie

iterácie funkcie

- nech f je funkcia z A do A
- potom všetky relácie $f^{(n)}$ pre $n \in \mathbb{N}$ sú funkcie z A do A
- pre každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in A$ platí

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)} \circ f)(x) = f(f^{(n)}(x))$$

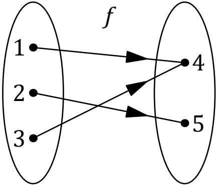
- pre každé $n \in \mathbb{N}^{+}$ a $x \in A$ platí

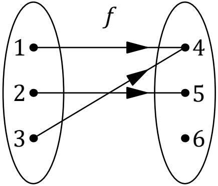
$$f^{(n)}(x) = \underbrace{f(f(f(\ldots f}_{n\text{-krát}}(x) \ldots)))$$

- príklad:
  - ak $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a $f(x) = x + 1$, tak platí:
    - $f^{(0)}(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}(x) = x$
    - $f^{(1)}(x) = f(x) = x + 1$
    - $f^{(2)}(x) = f(f(x)) = f(x + 1) = x + 2$
    - $f^{(3)}(x) = f(f(f(x))) = f(x + 2) = x + 3$
    - ...
    - $f^{(n)}(x) = x + n$

surjekcia

- nech $f : A \to B$;
  hovoríme, že funkcia f je **surjekcia na triedu** B
  (alebo skrátene, že je **na triedu** B alebo iba **na** B),
  a píšeme $f : A \xrightarrow{\text{na}} B$,
  ak $\operatorname{rng}(f) = B$
- príklady:
  - ak $f = \{\langle 1, 4\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 3, 4\rangle\}$,
    tak f je na množinu $\{4, 5\}$,
    ale nie na množinu $\{4, 5, 6\}$





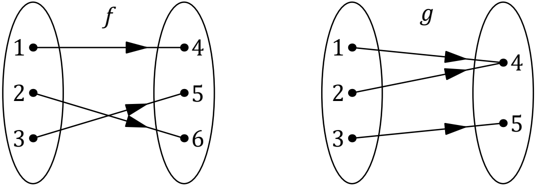
  - ak nasledovník $= \{\langle x, x + 1\rangle : x \in \mathbb{N}\}$,
    tak nasledovník je na množinu $\mathbb{N}^+$,
    ale nie na množinu $\mathbb{N}$

zloženie surjekcií je surjekcia

- nech $f : A \xrightarrow{\text{na}} B$ a $g : B \xrightarrow{\text{na}} C$,
  potom $(f \circ g) : A \xrightarrow{\text{na}} C$
  - vieme už, že $f \circ g$ je funkcia z A do C,
    z čoho $\mathrm{rng}(f \circ g) \subseteq C$
  - ukážeme ešte, že $\mathrm{rng}(f \circ g) \supseteq C$:
    - nech $c \in C$
    - keďže $g : B \xrightarrow{\text{na}} C$, existuje $b \in B$, že $g(b) = c$
    - keďže $f : A \xrightarrow{\text{na}} B$, existuje $a \in A$, že $f(a) = b$
    - potom $(f \circ g)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$
    - takže $c \in \mathrm{rng}(f \circ g)$

injekcia

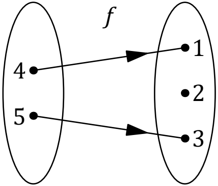
- nech $f : A \to B$;
  hovoríme, že funkcia f je **injekcia** alebo **prostá**, a píšeme $f : A \xrightarrow{1-1} B$,
  ak relácia f^{-1} je funkcia
- t. j. funkcia f je injekcia,
  akk $((\langle y, x_1\rangle \in f^{-1}) \land (\langle y, x_2\rangle \in f^{-1})) \to (x_1 = x_2)$,
  akk $((\langle x_1, y\rangle \in f) \land (\langle x_2, y\rangle \in f)) \to (x_1 = x_2)$,
  akk $((f(x_1) = y) \land (f(x_2) = y)) \to (x_1 = x_2)$,
  akk $(f(x_1) = f(x_2)) \to (x_1 = x_2)$ (y je len označenie tejto hodnoty),
  akk $(x_1 \neq x_2) \to (f(x_1) \neq f(x_2))$
- príklady:

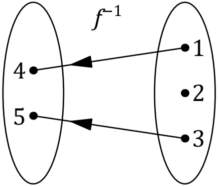


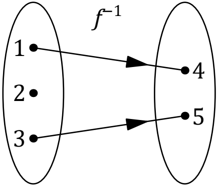
  - ak $f = \{\langle 1, 4\rangle, \langle 2, 6\rangle, \langle 3, 5\rangle\}$, tak f je injektívna
  - ak $g = \{\langle 1, 4\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 5\rangle\}$, tak g nie je injektívna
    (lebo $g(1) = g(2) = 4$, ale $1 \neq 2$)

inverzná funkcia

- nech $f : A \overset{1-1}{\to} B$ (t. j. relácia f^{-1} je funkcia);
  potom f^{-1} nazývame **inverzná funkcia** k funkcii f
- ak $f : \{4, 5\} \to \{1, 2, 3\}$ a $f = \{\langle 4, 1\rangle, \langle 5, 3\rangle\}$,
  tak $f^{-1} = \{\langle 1, 4\rangle, \langle 3, 5\rangle\}$







inverzná funkcia

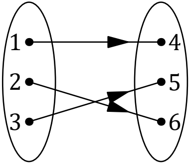
- $\mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{rng}(f)$
- $\mathrm{rng}(f^{-1}) = \mathrm{dom}(f)$
- $(f^{-1})^{-1} = f$
  - ako pri každej relácii
- funkcia f^{-1} je injekcia
  - keďže inverzná relácia k f^{-1} je f, čo je funkcia
- $f(x) = y$, akk $f^{-1}(y) = x$
  - t. j. $\langle x, y\rangle \in f$, akk $\langle y, x\rangle \in f^{-1}$
- $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$
  - ak $f(x) = y$, tak $(f \circ f^{-1})(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$
- $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{rng}(f)}$
  - ak $f(x) = y$, tak $(f^{-1} \circ f)(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$

zloženie injekcií je injekcia

- nech $f : A \stackrel{1-1}{\to} B$ a $g : B \stackrel{1-1}{\to} C$,
  potom $(f \circ g) : A \stackrel{1-1}{\to} C$
  - vieme už, že $f \circ g$ je funkcia z A do C
  - nech $a_1, a_2 \in A$ a platí $(f \circ g)(a_1) = (f \circ g)(a_2)$,
    t. j. $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$
  - keďže g je injekcia, platí $f(a_1) = f(a_2)$
  - keďže f je injekcia, platí $a_1 = a_2$

bijekcia

- nech $f : A \to B$;
  hovoríme, že funkcia f je **bijekcia**, a píšeme $f : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B$,
  ak f je zároveň injekcia aj surjekcia na B
- bijekcia je **popárovanie** prvkov triedy A a triedy B:
  injektívnosť zabezpečí, že každý prvok z A má iný pár v B,
  surjektívnosť zas, že žiaden prvok z B nezvýši
- príklady:
  - $\{\langle 1, 4\rangle, \langle 2, 6\rangle, \langle 3, 5\rangle\}$ je bijekcia z $\{1, 2, 3\}$ do $\{4, 5, 6\}$



  - $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $f(n) = n + 1$, je bijekcia z $\mathbb{N}$ na $\mathbb{N}^+$
  - $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $f(n) = 2n$, je bijekcia z $\mathbb{N}$ na množinu párnych čísel
  - $\log$ je bijekcia z $\mathbb{R}^+$ na $\mathbb{R}$
  - id_A je bijekcia z triedy A na seba

zloženie bijekcií je bijekcia

- nech $f : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B$ a $g : B \xrightarrow[\text{na}]{1-1} C$,
  potom $(f \circ g) : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} C$
  - $f : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B$ znamená, že $f : A \overset{1-1}{\to} B$ a $f : A \overset{\text{na}}{\to} B$
  - $g : B \xrightarrow[\text{na}]{1-1} C$ znamená, že $g : B \overset{1-1}{\to} C$ a $g : B \overset{\text{na}}{\to} C$
  - potom $(f \circ g) : A \overset{1-1}{\to} C$ a $(f \circ g) : A \overset{\text{na}}{\to} C$,
    takže $(f \circ g) : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} C$

inverzná bijekcia

- ak $f : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B$, tak $f^{-1} : B \xrightarrow[\text{na}]{1-1} A$
  - keďže funkcia f je injekcia, aj funkcia f^{-1} je injekcia
  - keďže funkcia f je surjektívna na B,
    platí $\mathrm{rng}(f) = B$,
    a teda $\mathrm{dom}(f^{-1}) = B$
  - keďže pre každé $a \in A$ platí
    $f^{-1}(f(a)) = (f \circ f^{-1})(a) = \mathrm{id}_A(a) = a$,
    funkcia f^{-1} je surjektívna na A

postupnosť

- **postupnosťou** prvkov triedy A nazývame funkciu z $\mathbb{N}$ do A
- ak f je postupnosť, namiesto $f(n)$ často píšeme f_n
  a tento prvok nazývame n**. člen** tejto postupnosti
- postupnosť f zapisujeme aj $(f_0, f_1, f_2, \dots)$
  alebo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(f_n)_{n=0}^{\infty}$, či $(f_n : n \in \mathbb{N})$
- klasický zápis $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je výrazne nesystémový a zavádzajúci,
  lebo na poradí prvkov záleží,
  nejde predsa o množinu $\{f_0, f_1, \dots\}$