8

EKVIVALENCIE

ekvivalencia

- reláciu na danej triede nazývame **ekvivalenciou**, ak je:
  - reflexívna (na tejto triede)
  - symetrická
  - tranzitívna
- príklady
  - $=$
  - rovnobežnosť
  - ekvivalencia výrokov
  - mať tých istých rodičov
  - mať toho istého triedneho učiteľa
  - mať rovnakú funkčnú hodnotu

triedy ekvivalencie

- nech $\sim$ je ekvivalencia na triede A a a je prvok A
- **triedou ekvivalencie** $\sim$ prvku a nazývame triedu

  $$\{x \in A : x \sim a\}$$

  a značíme ju $[a]_\sim$
- príklady
  - $[a]_=$ je množina $\{a\}$ pre ľubovoľný objekt a
  - ak p je priamka,
    tak $[p]_\parallel$ je množina všetkých priamok jej smeru
  - ak α je tvrdenie,
    tak $[\alpha]_\leftrightarrow$ je trieda všetkých tvrdení s ním ekvivalentných
  - trieda ekvivalencie v relácii *mať tých istých rodičov*
    je skupina všetkých vlastných súrodencov (včítane seba)
  - trieda ekvivalencie v relácii *mať toho istého triedneho učiteľa*
    je skupina všetkých spolužiakov (včítane seba), t. j. doslova trieda
  - ak $\equiv_f$ znamená mať rovnakú hodnotu v danej funkcii f,
    tak $[a]_{\equiv_f}$ je trieda $\{x \in \mathrm{D}(f) : f(x) = f(a)\}$
- každý prvok je v práve jednej triede ekvivalencie

ekvivalentné prvky majú tú istú triedu ekvivalencie

- nech $\sim$ je ekvivalencia na nejakej triede;
  potom $x \sim y$, akk $[x]_\sim = [y]_\sim$
  - $\boxed{\rightarrow}$
    - $z \in [x]_\sim$,
      akk $z \sim x$
      (definícia triedy ekvivalencie),
      ztv $z \sim y$
      (z tranzitivity $\sim$, keďže podľa predpokladu $x \sim y$),
      akk $z \in [y]_\sim$
      (definícia triedy ekvivalencie)
    - $z \in [y]_\sim$,
      akk $z \sim y$
      (definícia triedy ekvivalencie),
      ztv $z \sim x$
      (z tranzitivity $\sim$, keďže $y \sim x$,
      lebo podľa predpokladu $x \sim y$ a $\sim$ je symetrická),
      akk $z \in [x]_\sim$
      (definícia triedy ekvivalencie)
  - $\boxed{\leftarrow}$
    - $x \in [x]_\sim = [y]_\sim$, a teda $x \sim y$

rozklad

- **rozkladom** množiny A nazývame
  systém jej neprázdnych podmnožín $\{T_i : i \in I\}$ taký, že:
  - $\bigcup_{i \in I} T_i = A$
  - ak $i \neq j$, tak buď $T_i = T_j$, alebo $T_i \cap T_j = \emptyset$
- príklady
  - $\{\{1,5\},\{2,4,6\},\{3\}\}$ je rozklad množiny $\{1,2,3,4,5,6\}$
    - $I = \{1,2,3\}$
      a $T_1 = \{1,5\}$, $T_2 = \{2,4,6\}$, $T_3 = \{3\}$
    - $I = \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$
      a $T_\heartsuit = \{2,4,6\}$, $T_\diamondsuit = \{3\}$, $T_\clubsuit = \{2,4,6\}$, $T_\spadesuit = \{1,5\}$
  - $\{\{1\},\{2,4,6\},\{3\}\}$ nie je rozklad množiny $\{1,2,3,4,5,6\}$
    (lebo 5 nie je v žiadnej množine)
  - $\{\{1,5\},\{2,4,6\},\{3,5\}\}$ nie je rozklad množiny $\{1,2,3,4,5,6\}$
    (lebo 5 je v dvoch rôznych množinách)
  - $\{\{1,5\},\{2,4,6\},\emptyset,\{3\}\}$ nie je rozklad množiny $\{1,2,3,4,5,6\}$
    (lebo jedna z množín je prázdna)

rozklad generuje ekvivalenciu

- nech $\{T_i : i \in I\}$ je rozklad množiny A
- definujme reláciu $\sim$ vzťahom
  $x \sim y$, akk existuje $i \in I$, že $x \in T_i$ aj $y \in T_i$
- $\sim$ je ekvivalencia na A
  - $\sim$ je reflexívna na A
    - ak $x \in A = \bigcup_{i \in I} T_i$, tak $x \in T_i$ pre nejaké $i \in I$
    - existuje teda $i \in I$, že $x \in T_i$ a $x \in T_i$, a teda $x \sim x$
  - $\sim$ je symetrická
    - ak $x \sim y$, tak existuje $i \in I$, že $x \in T_i$ aj $y \in T_i$,
    - teda existuje $i \in I$, že $y \in T_i$ aj $x \in T_i$, a teda $y \sim x$
  - $\sim$ je tranzitívna
    - ak $x \sim y$ a $y \sim z$,
      tak existuje $i \in I$, že $x \in T_i$ aj $y \in T_i$,
      a existuje $j \in I$, že $y \in T_j$ aj $z \in T_j$
    - keďže $y \in T_i \cap T_j$, platí $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, a teda $T_i = T_j$
    - z toho $z \in T_j = T_i$
    - takže existuje $i \in I$, že $x \in T_i$ a $z \in T_i$, a teda $x \sim z$

ekvivalencia generuje rozklad

- nech $\sim$ je ekvivalencia na množine A
- nech pre každé x z A platí $T_x = [x]_\sim$
- tak $\{T_x : x \in A\}$ je rozklad množiny A
  - neprázdnosť:
    - pre každé $x \in A$ platí $x \in [x]_\sim = T_x$, takže $T_x \neq \emptyset$
  - úplnosť:
    - pre každé $x \in A$ platí $x \in [x]_\sim = T_x$, takže $\bigcup_{x \in A} T_x = A$
  - rovnosť nedisjunktných tried:
    - nech $x, y \in A$, pričom $T_x \cap T_y \neq \emptyset$
    - existuje teda $z \in A$, že $z \in T_x \cap T_y$
    - keďže $z \in T_x = [x]_\sim$, platí $z \sim x$, a teda $[z]_\sim = [x]_\sim = T_x$
    - keďže $z \in T_y = [y]_\sim$, platí $z \sim y$, a teda $[z]_\sim = [y]_\sim = T_y$
    - z toho už $T_x = T_y$

dualita rozkladov a ekvivalencií

- rozklad generovaný ekvivalenciou generuje pôvodnú ekvivalenciu
- ekvivalencia generovaná rozkladom generuje pôvodný rozklad

zjemnenie

- hovoríme, že rozklad $\{T_i : i \in I\}$ je **zjemnením** rozkladu $\{S_j : j \in J\}$, ak pre každé $i \in I$ existuje $j \in J$, že $T_i \subseteq S_j$
- zjemnenie teda vznikne rozdelením niektorých množín rozkladu
- príklady
  - $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5\}\}$ je zjemnením $\{\{1,2\},\{3,4,5\}\}$
    - nech $I = \{1,2,3\}$, $T_1 = \{1,2\}$, $T_2 = \{3,4\}$, $T_3 = \{5\}$ a $J = \{1,2\}$, $S_1 = \{1,2\}$, $S_2 = \{3,4,5\}$
    - potom $T_1 \subseteq S_1$, $T_2 \subseteq S_2$, $T_3 \subseteq S_2$
  - $\{\{1,2,3\},\{4\},\{5\}\}$ nie je zjemnením $\{\{1,2\},\{3,4,5\}\}$ (lebo $\{1,2,3\}$ nie je časťou žiadnej množiny druhého rozkladu)
- zjemnenie je binárnou reláciou na množine rozkladov
- jeden rozklad je zjemnením druhého práve vtedy, keď sú nimi generované ekvivalencie v inklúzii

zjemnenie je usporiadanie

- zjemnenie je reflexívne
  - ak $\{T_i : i \in I\}$ je rozklad, pre každé $i \in I$ platí $T_i \subseteq T_i$
- zjemnenie je antisymetrické
  - nech $\{T_i : i \in I\}$ je zjemnením $\{S_j : j \in J\}$ a naopak
  - potom k $i \in I$ existuje $j \in J$, že $T_i \subseteq S_j$
    a k tomuto j existuje $k \in I$, že $S_j \subseteq T_k$
  - z toho však $T_i \subseteq T_k$, a teda $T_i = T_k$ (lebo $T_i \neq \emptyset$), takže $T_i = S_j$
  - každá množina z prvého rozkladu je i v druhom,
    tieto rozklady sa teda zhodujú
- zjemnenie je tranzitívne
  - nech $\{T_i : i \in I\}$ je zjemnením $\{S_j : j \in J\}$
    a $\{S_j : j \in J\}$ je zjemnením $\{R_k : k \in K\}$
  - potom k $i \in I$ existuje $j \in J$, že $T_i \subseteq S_j$
    a k tomuto j existuje $k \in K$, že $S_j \subseteq R_k$
  - takže k $i \in I$ existuje $k \in K$, že $T_i \subseteq R_k$,
    a teda $\{T_i : i \in I\}$ je zjemnením $\{R_k : k \in K\}$
- minimum je zložené len z jednoprvkových množín,
  maximum obsahuje jedinú, pôvodnú množinu

od predusporiadania k usporiadaniu

- na množine A s predusporiadaním R definujme reláciu $\sim$:
  $x \sim y$, akk $x\ R\ y$ a zároveň $y\ R\ x$
- $\sim$ je ekvivalencia na A
  - $\sim$ je reflexívna na A
    - keďže R je reflexívna, platí $x\ R\ x$ a $x\ R\ x$, a teda $x \sim x$
  - $\sim$ je symetrická
    - ak $x \sim y$, tak $x\ R\ y$ a $y\ R\ x$, a teda $y \sim x$
  - $\sim$ je tranzitívna
    - ak $x \sim y$ a $y \sim z$, tak $x\ R\ y$ a $y\ R\ x$ a $y\ R\ z$ a $z\ R\ y$
    - keďže R je tranzitívna, platí $x\ R\ z$ a $z\ R\ x$, a teda $x \sim z$

od predusporiadania k usporiadaniu

- z každej triedy ekvivalencie $\sim$ vyberme jedného reprezentanta
- na ich množine M definujme reláciu $\leq$ ako $R \cap (M \times M)$
- $\leq$ je usporiadanie (na M)
  - $\leq$ je reflexívna (na M)
    - keďže R je reflexívna, platí $x\ R\ x$, a teda $x \leq x$
  - $\leq$ je antisymetrická
    - ak $x \leq y$ a $y \leq x$, tak $x\ R\ y$ a $y\ R\ x$, a teda $x \sim y$
    - x a y sú teda reprezentantmi tej istej triedy, čiže $x = y$
  - $\leq$ je tranzitívna
    - ak $x \leq y$ a $y \leq z$, tak $x\ R\ y$ a $y\ R\ z$
    - keďže R je tranzitívna, platí $x\ R\ z$, a teda $x \leq z$
- takto sme prešli od predusporiadania k usporiadaniu

faktorizácia

- na množine všetkých tried ekvivalencie $\sim$ definujme reláciu $\leq_\sim$:
  ak x a y sú z M z predošlého prístupu
  (t. j. reprezentanti svojich tried ekvivalencie),
  tak $[x]_\sim \leq_\sim [y]_\sim$, akk $x \leq y$
- $\leq_\sim$ je usporiadanie
  - $\leq_\sim$ je reflexívna
    - keďže $\leq$ je reflexívna, platí $x \leq x$
    - z toho $[x]_\sim \leq_\sim [x]_\sim$
  - $\leq_\sim$ je antisymetrická
    - ak $[x]_\sim \leq_\sim [y]_\sim$ a $[y]_\sim \leq_\sim [x]_\sim$, tak $x \leq y$ a $y \leq x$
    - keďže $\leq$ je antisymetrická, platí $x = y$
    - z toho $[x]_\sim = [y]_\sim$
  - $\leq_\sim$ je tranzitívna
    - ak $[x]_\sim \leq_\sim [y]_\sim$ a $[y]_\sim \leq_\sim [z]_\sim$, tak $x \leq y$ a $y \leq z$
    - keďže $\leq$ je tranzitívna, platí $x \leq z$
    - z toho $[x]_\sim \leq_\sim [z]_\sim$

zvyškové triedy

- na množine $\mathbb{Z}$ definujme reláciu $\equiv_n$, kde $n \in \mathbb{N}$, takto:
  $x \equiv_n y$, akk $n \mid (x - y)$
- $x \equiv_n y$ sa často ekvivalentne zapisuje $x \equiv y \mod n$
- $\equiv_n$ je ekvivalencia (na $\mathbb{Z}$)
  - $\equiv_n$ je reflexívna na (na $\mathbb{Z}$)
    - platí $n \mid 0$,
      t. j. $n \mid (x - x)$,
      a teda $x \equiv_n x$
  - $\equiv_n$ je symetrická
    - ak $x \equiv_n y$, tak $n \mid (x - y)$
    - potom však $n \mid (-1) \cdot (x - y)$,
      t. j. $n \mid (y - x)$,
      a teda $y \equiv_n x$
  - $\equiv_n$ je tranzitívna
    - ak $x \equiv_n y$ a $y \equiv_n z$, tak $n \mid (x - y)$ a $n \mid (y - z)$
    - potom však $n \mid ((x - y) + (y - z))$,
      t. j. $n \mid (x - z)$,
      a teda $x \equiv_n z$

zvyškové triedy

- triedy ekvivalencie $\equiv_n$ nazývame **zvyškové triedy po delení** n
  - $x \equiv_0 y$ znamená $0 \mid (x - y)$,
    t. j. $x = y$,
    takže všetky triedy ekvivalencie $\equiv_0$ sú jednoprvkové
  - $x \equiv_1 y$ znamená $1 \mid (x - y)$,
    čo platí vždy,
    takže trieda ekvivalencie $\equiv_1$ je jediná a rovná $\mathbb{Z}$
  - ak $n \geq 2$, tak $x \equiv_n y$ znamená $n \mid (x - y)$,
    čo platí práve vtedy,
    keď x a y majú rovnaký zvyšok po delení n
  - zvyšových tried po delení kladným n je n
  - špeciálne pre $n = 2$ sú zvyškové triedy dve:
    množina párnych čísel a množina nepárnych čísel

konštrukcia množiny $\mathbb{Z}$ z množiny $\mathbb{N}$

- na množine $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definujme reláciu $\equiv$ takto:
  $\langle x_1, x_2 \rangle \equiv \langle y_1, y_2 \rangle$, akk $x_1 + y_2 = y_1 + x_2$
- $\equiv$ je ekvivalencia (na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$)
  - $\equiv$ je reflexívna (na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$)
    - platí $x_1 + x_2 = x_1 + x_2$, a teda $\langle x_1, x_2 \rangle \equiv \langle x_1, x_2 \rangle$
  - $\equiv$ je symetrická
    - ak $\langle x_1, x_2 \rangle \equiv \langle y_1, y_2 \rangle$, tak $x_1 + y_2 = y_1 + x_2$
    - potom $y_1 + x_2 = x_1 + y_2$, a teda $\langle y_1, y_2 \rangle \equiv \langle x_1, x_2 \rangle$
  - $\equiv$ je tranzitívna
    - ak $\langle x_1, x_2 \rangle \equiv \langle y_1, y_2 \rangle$ a $\langle y_1, y_2 \rangle \equiv \langle z_1, z_2 \rangle$,
      tak $x_1 + y_2 = y_1 + x_2$ a $y_1 + z_2 = z_1 + y_2$
    - po sčítaní $x_1 + y_2 + y_1 + z_2 = z_1 + y_2 + y_1 + x_2$,
      z čoho $x_1 + z_2 = z_1 + x_2$, a teda $\langle x_1, x_2 \rangle \equiv \langle z_1, z_2 \rangle$

konštrukcia množiny $\mathbb{Z}$ z množiny $\mathbb{N}$

- vzniknuté triedy ekvivalencie nazveme **celé čísla** ($\mathbb{Z}$)
  - triedu $[\langle n, 0\rangle]_\equiv = \{\langle x+n, x\rangle : x \in \mathbb{N}\}$ nazveme $n_\mathbb{Z}$
  - triedu $[\langle 0, n\rangle]_\equiv = \{\langle x, x+n\rangle : x \in \mathbb{N}\}$ nazveme $(-n)_\mathbb{Z}$
- na tomto rozklade sa definujú operácie $+_\mathbb{Z}$ a $\cdot_\mathbb{Z}$:
  - $[\langle x_1, x_2\rangle]_\equiv +_\mathbb{Z} [\langle y_1, y_2\rangle]_\equiv = [\langle x_1 + y_1, x_2 + y_2\rangle]_\equiv$
  - $m_\mathbb{Z} \cdot_\mathbb{Z} n_\mathbb{Z} = (mn)_\mathbb{Z}$,
    $m_\mathbb{Z} \cdot_\mathbb{Z} (-n)_\mathbb{Z} = (-mn)_\mathbb{Z}$,
    $(-m)_\mathbb{Z} \cdot_\mathbb{Z} n_\mathbb{Z} = (-mn)_\mathbb{Z}$,
    $(-m)_\mathbb{Z} \cdot_\mathbb{Z} (-n)_\mathbb{Z} = (mn)_\mathbb{Z}$
- ak m a n sú prirodzené čísla, tak platí:
  - $m_\mathbb{Z} +_\mathbb{Z} n_\mathbb{Z} = [\langle m, 0\rangle]_\equiv +_\mathbb{Z} [\langle n, 0\rangle]_\equiv = [\langle m+n, 0\rangle]_\equiv = (m+n)_\mathbb{Z}$
  - $m_\mathbb{Z} \cdot_\mathbb{Z} n_\mathbb{Z} = (mn)_\mathbb{Z}$,
- $\mathbb{Z}$ tak obsahuje kópiu $\mathbb{N}$ (a to $\{n_\mathbb{Z} : n \in \mathbb{N}\}$),
  ktorou nahradíme pôvodné $\mathbb{N}$
- (toto nové) $\mathbb{N}$ tak možno považovať za podmnožinu $\mathbb{Z}$
  (a na pôvodné $\mathbb{N}$ zabudnúť)
  - namiesto $z_\mathbb{Z}$ môžeme písať jednoducho z

konštrukcia množiny $\mathbb{Q}$ z množiny $\mathbb{Z}$

- na množine $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ definujme reláciu $\equiv$ takto:
  $\langle x_1, x_2 \rangle \equiv \langle y_1, y_2 \rangle$, akk $x_1 \cdot y_2 = y_1 \cdot x_2$
- $\equiv$ je ekvivalencia (na $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$)
  - $\equiv$ je reflexívna (na $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$)
    - platí $x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot x_2$, a teda $\langle x_1, x_2 \rangle \equiv \langle x_1, x_2 \rangle$
  - $\equiv$ je symetrická
    - ak $\langle x_1, x_2 \rangle \equiv \langle y_1, y_2 \rangle$, tak $x_1 \cdot y_2 = y_1 \cdot x_2$
    - potom $y_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot y_2$, a teda $\langle y_1, y_2 \rangle \equiv \langle x_1, x_2 \rangle$
  - $\equiv$ je tranzitívna
    - ak $\langle x_1, x_2 \rangle \equiv \langle y_1, y_2 \rangle$ a $\langle y_1, y_2 \rangle \equiv \langle z_1, z_2 \rangle$,
      tak $x_1 \cdot y_2 = y_1 \cdot x_2$ a $y_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot y_2$
    - po vynásobení $x_1 \cdot y_2 \cdot y_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot y_2 \cdot y_1 \cdot x_2$,
      z čoho $x_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot x_2$
      (lebo $y_2 \neq 0$, a ak $y_1 = 0$, tak $x_1 = 0$ a $z_1 = 0$),
      a teda $\langle x_1, x_2 \rangle \equiv \langle z_1, z_2 \rangle$

konštrukcia množiny $\mathbb{Q}$ z množiny $\mathbb{Z}$

- vzniknuté triedy ekvivalencie nazveme **racionálne čísla** ($\mathbb{Q}$)
  - ak je d najväčší spoločný deliteľ p a q, kde $q \neq 0$, tak $p = du$ a $q = dv$
  - triedu $[\langle p, q\rangle]_{\equiv} = \{\langle x \cdot u, x \cdot v\rangle : x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ nazveme $\frac{p}{q}$
  - niektoré triedy majú viac názvov,
    napr. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{-1}{-2}$
- na tomto rozklade sa definujú operácie:
  - $+_{\mathbb{Q}}$: $\frac{a}{b} +_{\mathbb{Q}} \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$
  - $\cdot_{\mathbb{Q}}$: $\frac{a}{b} \cdot_{\mathbb{Q}} \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- špeciálne platí:
  - $\frac{a}{1} +_{\mathbb{Q}} \frac{c}{1} = \frac{a \cdot 1 + c \cdot 1}{1 \cdot 1} = \frac{a + c}{1}$
  - $\frac{a}{1} \cdot_{\mathbb{Q}} \frac{c}{1} = \frac{ac}{1 \cdot 1} = \frac{ac}{1}$
- $\mathbb{Q}$ tak obsahuje kópiu $\mathbb{Z}$ (a to $\{\frac{z}{1} : z \in \mathbb{Z}\}$),
  ktorou nahradíme pôvodné $\mathbb{Z}$
- (toto nové) $\mathbb{Z}$ tak možno považovať za podmnožinu $\mathbb{Q}$
  (a na pôvodné $\mathbb{Z}$ zabudnúť)
  - namiesto $\frac{z}{1}$ môžeme písať jednoducho z