7
USPORIADANIA

predusporiadanie

- reláciu (na danej triede) nazveme **predusporiadaním**, ak je:
  - reflexívna (na tejto triede)
  - tranzitívna
- príklady predusporiadaní:
  - zoradenie objektov podľa istého atribútu (výšky, hmotnosti, veku, abecedy, ...)
  - $\leq$, $\geq$, $=$
  - deliteľnosť
  - inklúzia na triede všetkých podmnožín danej triedy
  - prefixovosť na množine slov daného jazyka
    - $\langle c_1, \ldots, c_n \rangle \preceq \langle d_1, \ldots, d_m \rangle$,
      akk $n \leq m$ a pre každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí $c_i = d_i$
- príklady relácií, ktoré nie sú predusporiadaniami:
  - $\neq$
    (nie je reflexívna ani tranzitívna)
  - $<$, $>$
    (nie sú reflexívne)

usporiadanie

- reláciu (na danej triede) nazveme **usporiadaním**, ak je:
  - reflexívna (na tejto triede)
  - antisymetrická
  - tranzitívna
- každé usporiadanie je aj predusporiadaním
- príklady usporiadaní:
  - zoradenie objektov podľa jedinečného atribútu
  - $\leq$, $\geq$, $=$
  - deliteľnosť na množine $\mathbb{N}$
  - inklúzia na triede všetkých podmnožín danej triedy
  - prefixovosť
- príklady predusporiadaní, ktoré nie sú usporiadaniami:
  - zoradenie objektov podľa nejedinečného atribútu
  - deliteľnosť na množine $\mathbb{Z}$

ostré usporiadanie

- reláciu (na danej triede) nazveme **ostrým usporiadaním**, ak je:
  - antireflexívna
  - antisymetrická
  - tranzitívna
- príklady ostrých usporiadaní:
  - $<, >$
  - vlastná inklúzia na triede všetkých podmnožín danej triedy
  - $\emptyset$

ostré usporiadanie vs. usporiadanie

- ak je R usporiadanie na triede A,
  tak $R \setminus \mathrm{id}_A$ je ostré usporiadanie na triede A
  - $<$ sa zhoduje s $(\leq \setminus \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$
  - $>$ sa zhoduje s $(\geq \setminus \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$
- ak je R ostré usporiadanie na triede A,
  tak $R \cup \mathrm{id}_A$ je usporiadanie na triede A
  - $\leq$ sa zhoduje s $(< \cup \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$
  - $\geq$ sa zhoduje s $(> \cup \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$
- v takomto zmysle možno namiesto o usporiadaní
  hovoriť o príslušnom ostrom usporiadaní
  a naopak

lineárne usporiadanie

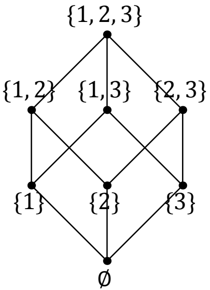
- nech R je ľubovoľné usporiadanie na triede A
- prvky x a y triedy A nazveme **porovnateľné** (v R), ak platí $x\ R\ y$ alebo $y\ R\ x$; inak budú **neporovnateľné** (v R)
- usporiadanie R na triede A nazveme **lineárne**, ak sú každé dva prvky A porovnateľné v R
- príklady lineárnych usporiadaní:
  - klasické usporiadanie reálnych čísel
  - lexikografické usporiadanie slov
- príklady nelineárnych usporiadaní:
  - inklúzia (lebo napríklad neplatí ani $\{1\} \subseteq \{2\}$, ani $\{2\} \subseteq \{1\}$)
  - deliteľnosť na $\mathbb{N}$ (lebo napríklad neplatí ani $2 \mid 3$, ani $3 \mid 2$)
  - prefixovosť na aspoň dvojprvkovej triede (lebo napríklad neplatí ani $\langle 1\rangle \preceq \langle 2\rangle$, ani $\langle 2\rangle \preceq \langle 1\rangle$)

dolní a horní susedia

- nech A je trieda ostro usporiadaná reláciou R
  a nech x a y sú jej prvky
- x nazývame **dolným susedom** y, ak platí $(x\ R\ y)$
  a neexistuje $z \in A$ také, že platí $(x\ R\ z) \wedge (z\ R\ y)$
- príklady:
  - v usporiadaní vlastnou inklúziou $\subset$ je $\{1\}$ dolným susedom $\{1, 2\}$
  - v usporiadaní vlastnou inklúziou $\subset$ nie je $\{1\}$ dolným susedom $\{2\}$
    (lebo $\{1\} \not\subset \{2\}$)
  - v usporiadaní (vlastnou) inklúziou $\{1\}$ nie je dolným susedom $\{1, 2, 3\}$
    (lebo síce $\{1\} \subset \{1, 2, 3\}$, ale $\{1\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$)
  - v ostrom usporiadaní $<$ množiny $\mathbb{N}$ je 2 dolným susedom 3
  - v ostrom usporiadaní $<$ množiny $\mathbb{N}$ číslo 0 nemá dolného suseda
  - v ostrom usporiadaní $<$ množiny $\mathbb{R}$
    žiadne číslo nemá dolného suseda
    (lebo ak $x < y$, tak $x < \frac{x+y}{2} < y$)
- x nazývame **horným susedom** y, ak platí $(y\ R\ x)$
  a neexistuje $z \in A$ také, že platí $(y\ R\ z) \wedge (z\ R\ x)$
- relácie *byť dolným susedom* a *byť horným susedom*
  sú navzájom inverzné

Hasseho diagram

- niektoré usporiadania možno znázorniť **Hasseho diagramom**
  - uzly reprezentujú prvky triedy
  - žiadna spojnica medzi nimi nie je vodorovná
  - spojnica medzi uzlami znamená,
    že jej horný koniec jej horným susedom dolného konca
- Hasseho diagram systému podmnožín množiny $\{1, 2, 3\}$
  usporiadanej (vlastnou) inklúziou:



najväčší a najmenší prvok

- nech A je trieda usporiadaná reláciou R a m jej prvok
- m nazveme **najväčší prvok** alebo **maximum** triedy A (v usporiadaní R), ak je (v zmysle R) väčší od všetkých ostatných prvkov A, t. j. ak $(\forall x \in A)(x\ R\ m)$
- m nazveme **najmenší prvok** alebo **minimum** triedy A (v usporiadaní R), ak je (v zmysle R) menší od všetkých ostatných prvkov A, t. j. ak $(\forall x \in A)(m\ R\ x)$
- minimum i maximum je najviac jedno
- minimum a maximum závisia nielen od triedy, ale aj od jej usporiadania

najväčší a najmenší prvok

- príklady:
  - v klasickom usporiadaní množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ je minimum 1 a maximum 4
  - v klasickom usporiadaní množiny $\mathbb{N}$ podľa veľkosti je minimum 0 a maximum neexistuje
  - v klasickom usporiadaní množiny $\mathbb{R}$ neexistuje ani minimum ani maximum
  - v klasickom usporiadaní intervalu $[a, b]$, kde $a \leq b$, je minimum a a maximum b
  - v klasickom usporiadaní intervalu $[a, b)$, kde $a < b$, je minimum a a maximum neexistuje
  - v množine $\mathbb{N}$ usporiadanej reláciou deliteľnosti je minimum 1 a maximum 0
  - v usporiadaní prirodzených čísel reláciou $\geq$ je maximum 0 a minimum neexistuje

maximálne a minimálne prvky

- nech A je trieda usporiadaná reláciou R a m jej prvok
- m nazveme **maximálny prvok** triedy A (v usporiadaní R), ak nie je (v zmysle R) menší od žiadneho iného prvku A, t. j. $(\forall x \in A)((x \neq m) \rightarrow \neg(m\ R\ x))$
- m nazveme **minimálny prvok** triedy A (v usporiadaní R), ak nie je (v zmysle R) väčší od žiadneho iného prvku A, t. j. $(\forall x \in A)((x \neq m) \rightarrow \neg(x\ R\ m))$
- ak existuje najväčší prvok, je jediný maximálny
- ak existuje najmenší prvok, je jediný minimálny
- v lineárnom usporiadaní splývajú pojmy maximum a maximálny prvok a pojmy minimum a minimálny prvok
- v nelineárnom usporiadaní môže byť maximálnych i minimálnych prvkov viac
- príklady:
  - v množine $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ usporiadanej reláciou deliteľnosti je minimálny prvok 1 a maximálne prvky sú 4, 5 a 6
  - v množine $\{2, 3, 6\}$ usporiadanej reláciou deliteľnosti je maximálny prvok 6 a minimálne prvky sú 2 a 3

dolné ohraničenie

- nech A je trieda usporiadaná reláciou R,
  m jej prvok a X je jej podtrieda
- m nazveme **dolným ohraničením** triedy X (v usporiadaní R),
  ak $(\forall x \in X)(m\ R\ x)$
- príklady:
  - v klasickom usporiadaní $\mathbb{R}$ má uzavretý interval $[2, 3]$
    dolné ohraničenia (napríklad) -1, 0, 1, 1,5 alebo 2,
    nie však 2,5
  - v klasickom usporiadaní $\mathbb{R}$ má otvorený interval $(2, 3)$
    dolné ohraničenia (napríklad) -1, 0, 1, 1,5 alebo 2,
    nie však 2,5
  - v klasickom usporiadaní nemá $\mathbb{R}$ žiadne dolné ohraničenie
  - v usporiadaní $\mathbb{N}$ deliteľnosťou má trieda $\{6, 8, 12\}$
    dolné ohraničenia 1 alebo 2,
    nie však (napríklad) 4
  - v usporiadaní inklúziou má systém množín $\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}\}$
    dolné ohraničenia $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$,
    nie však $\{1, 2, 3\}$

infimum

- nech A je trieda usporiadaná reláciou R,
  m jej prvok a X je jej podtrieda
- m nazveme **infimom** triedy X (v usporiadaní R), ak platí:
  - m je dolným ohraničením triedy X (v usporiadaní R)
  - ak je k dolným ohraničením triedy X (v usporiadaní R),
    tak $(k\ R\ m)$
- infimum je teda **najväčšie dolné ohraničenie**
- ak existuje minimum, je aj infimom
- príklady:
  - v klasickom usporiadaní $\mathbb{R}$ má uzavretý interval $[2, 3]$
    infimum 2
  - v klasickom usporiadaní $\mathbb{R}$ má otvorený interval $(2, 3)$
    infimum 2
  - v klasickom usporiadaní nemá $\mathbb{R}$ infimum
  - v usporiadaní $\mathbb{N}$ deliteľnosťou má trieda $\{6, 8, 12\}$
    infimum 2
  - v usporiadaní inklúziou má systém množín $\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}\}$
    infimum $\{1, 2\}$

infimum

- v usporiadaní $\mathbb{N}$ deliteľnosťou je infimom množiny $\{a, b\}$ najväčší spoločný deliteľ prvkov a a b
  - najväčší spoločný deliteľ prvkov a a b označme d
  - d delí a,
    d delí b
  - ak nejaké c delí a aj b,
    tak c delí aj d
- v usporiadaní $\mathbb{N}$ deliteľnosťou je infimom ľubovoľnej množiny najväčší spoločný deliteľ všetkých jej prvkov
- v usporiadaní inklúziou má systém množín $\{A, B\}$ infimum $A \cap B$
  - $A \cap B \subseteq A$,
    $A \cap B \subseteq B$
  - ak $C \subseteq A$ a $C \subseteq B$,
    tak $C \subseteq A \cap B$
- v usporiadaní inklúziou má systém množín $\{A_i : i \in I\}$ infimum $\bigcap_{i \in I} A_i$
  - pre každé j z I platí $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_j$
  - ak pre každé j z I platí $B \subseteq A_j$,
    tak $B \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$

horné ohraničenie a suprémum

- nech A je trieda usporiadaná reláciou R,
  m jej prvok a X je jej podtrieda
- m nazveme **horným ohraničením** triedy X (v usporiadaní R),
  ak $(\forall x \in X)(x\ R\ m)$
- m nazveme **suprémom** triedy X (v usporiadaní R), ak platí:
  - m je horným ohraničením triedy X (v usporiadaní R)
  - ak je k horným ohraničením triedy X (v usporiadaní R),
    tak $(m\ R\ k)$
- suprémum je teda **najmenšie horné ohraničenie**
- ak existuje maximum, je aj suprémom
- príklady:
  - v klasickom usporiadaní $\mathbb{R}$ má $[2, 3]$ suprémum 3
  - v klasickom usporiadaní $\mathbb{R}$ má $(2, 3)$ suprémum 3
  - v klasickom usporiadaní nemá $\mathbb{R}$ suprémum
  - v usporiadaní $\mathbb{N}$ deliteľnosťou má $\{6, 8, 12\}$ suprémum 24
  - v usporiadaní inklúziou má $\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}\}$
    suprémum $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

suprémum

- v usporiadaní $\mathbb{N}$ deliteľnosťou je suprémom množiny $\{a, b\}$ najmenší spoločný násobok prvkov a a b
  - najmenší spoločný násobok prvkov a a b označme n
  - a delí n,
b delí n
  - ak a aj b delia nejaké m,
tak aj n delí m
- v usporiadaní $\mathbb{N}$ deliteľnosťou je suprémom ľubovoľnej množiny najmenší spoločný násobok všetkých jej prvkov
- v usporiadaní inklúziou má systém množín $\{A, B\}$ suprémum $A \cup B$
  - $A \subseteq A \cup B$,
$B \subseteq A \cup B$
  - ak $A \subseteq C$ a $B \subseteq C$,
tak $A \cup B \subseteq C$
- v usporiadaní inklúziou má systém množín $\{A_i : i \in I\}$ suprémum $\bigcup_{i \in I} A_i$
  - pre každé j z I platí $A_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$
  - ak pre každé j z I platí $A_j \subseteq B$,
tak $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq B$

usporiadanie po zložkách

- nech pre každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je A_i trieda s usporiadaním $\leq_i$
- **usporiadaním** triedy $A_1 \times \dots \times A_n$ **po zložkách** nazveme reláciu $\preceq$ definovanú: $\langle c_1, \dots, c_n \rangle \preceq \langle d_1, \dots, d_n \rangle$, akk pre každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $c_i \leq_i d_i$
- nech $n = 2, A_1 = A_2 = \mathbb{R}$ a $\leq_1$ aj $\leq_2$ je klasické usporiadanie
  - $\langle 1, 3 \rangle \preceq \langle 2, 4 \rangle$ (lebo $1 \leq_1 2$ a $3 \leq_2 4$)
  - $\langle 1, 3 \rangle \preceq \langle 1, 4 \rangle$ (lebo $1 \leq_1 1$ a $3 \leq_2 4$)
  - $\langle 1, 4 \rangle \not\preceq \langle 2, 3 \rangle$ (lebo síce $1 \leq_1 2$, ale neplatí $4 \leq_2 3$)
  - $\langle 2, 3 \rangle \not\preceq \langle 1, 4 \rangle$ (lebo síce $3 \leq_2 4$, ale neplatí $2 \leq_1 1$)
- $\preceq$ je naozaj usporiadanie, ale (v prípade $n \geq 2$) nie lineárne
  - lebo napríklad neplatí ani $\langle 1, 2 \rangle \preceq \langle 2, 1 \rangle$, ani $\langle 2, 1 \rangle \preceq \langle 1, 2 \rangle$

lexikografické usporiadanie

- nech A je abeceda s usporiadaním $\leq$
- **lexikografickým usporiadaním** triedy slov abecedy A nazveme reláciu $\sqsubseteq$ definovanú:
  $\langle c_1, \ldots, c_n \rangle \sqsubseteq \langle d_1, \ldots, d_m \rangle$, ak platí jedna z možností:
  - $n \leq m$
    a pre každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí $c_i = d_i$
    (t. j. $\langle c_1, \ldots, c_n \rangle$ je prefix $\langle d_1, \ldots, d_m \rangle$)
  - existuje $k \leq \min\{n, m\}$ také,
    že pre každé $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ platí $c_i = d_i$,
    ale $c_k < d_k$
- nech $\leq$ je klasické usporiadanie latinskej abecedy
  - $\mathsf{BEAT} \sqsubseteq \mathsf{BEATLES}$
    (prvá možnosť, $n = 4$, $m = 7$,
    $c_1 = d_1 = \mathsf{B}$, $c_2 = d_2 = \mathsf{E}$, $c_3 = d_3 = \mathsf{A}$, $c_4 = d_4 = \mathsf{T}$)
  - $\mathsf{BEATLES} \sqsubseteq \mathsf{BEER}$
    (druhá možnosť, $n = 7$, $m = 4$, $k = 3$,
    $c_1 = d_1 = \mathsf{B}$, $c_2 = d_2 = \mathsf{E}$, $c_3 = \mathsf{A} < \mathsf{E} = d_3$)
- lexikografické usporiadanie je lineárne