6
RELAČNÁ ALGEBRA

inverzná relácia

- **inverznou reláciou** k relácii R na $A \times B$ nazývame reláciu

$$\{\langle b, a\rangle \in B \times A : \langle a, b\rangle \in R\}$$

  a označujeme ju R^{-1}
- $\langle b, a\rangle \in R^{-1}$, akk $\langle a, b\rangle \in R$
- ak $R = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,3\rangle\}$,
  tak $R^{-1} = \{\langle 3,1\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 3,2\rangle\}$

R

1	3
2	5
1	1
2	3

R^{-1}

3	1
5	2
1	1
3	2

- $(R^{-1})^{-1} = R$,
  čiže inverzná relácia k inverznej relácii je pôvodná relácia

inverzná relácia

- príklady:
  - relácie *byť násobkom* a *byť deliteľom* sú navzájom inverzné
  - relácie $\leq$ a $\geq$ sú navzájom inverzné
  - relácie $<$ a $>$ sú navzájom inverzné
  - relácia $=$ je inverzná sama k sebe
  - relácia $\neq$ je inverzná sama k sebe
  - relácie *byť rodičom* a *byť dieťaťom* sú navzájom inverzné
  - relácie *byť predkom* a *byť potomkom* sú navzájom inverzné
  - relácie *byť podriadeným* a *byť nadriadeným* sú navzájom inverzné

inverzná relácia a symetria

- relácia R je symetrická práve vtedy, keď $R^{-1} = R$
  - $\boxed{\rightarrow}$
    - $\langle x, y\rangle \in R^{-1}$,
      akk $\langle y, x\rangle \in R$
      (podľa definície inverznej relácie),
      ztv $\langle x, y\rangle \in R$
      (lebo R je podľa predpokladu symetrická),
      takže $R^{-1} \subseteq R$
    - $\langle x, y\rangle \in R$,
      ztv $\langle y, x\rangle \in R$
      (lebo R je podľa predpokladu symetrická),
      akk $\langle x, y\rangle \in R^{-1}$
      (podľa definície inverznej relácie),
      takže $R \subseteq R^{-1}$
  - $\boxed{\leftarrow}$
    - $\langle x, y\rangle \in R$,
      ztv $\langle y, x\rangle \in R^{-1}$
      (podľa definície inverznej relácie),
      akk $\langle y, x\rangle \in R$
      (lebo podľa predpokladu $R^{-1} = R$)

druhé zložky relácie

- ak R je relácia na $A \times B$ a $X \subseteq A$,
  tak triedu
  $$\{b \in B : (\exists a \in X)\langle a, b\rangle \in R\}$$
  označujeme $R[X]$
- $b \in R[X]$, akk $(\exists a \in X)\langle a, b\rangle \in R$, akk $\exists a(a \in X \wedge \langle a, b\rangle \in R)$
- ak $A = B = \mathbb{N}$ a $R = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$, tak:
  - $R[\{1\}] = \{1, 3\}$
  - $R[\{2\}] = \{3, 5\}$
  - $R[\{1, 2\}] = \{1, 3, 5\}$
  - $R[\{3, 4\}] = \emptyset$
  - $R[\emptyset] = \emptyset$

prvé zložky relácie

- ak R je relácia na $A \times B$ a $Y \subseteq B$,
  tak trieda $R^{-1}[Y]$ je potom

$$\{a \in A : (\exists b \in Y)\langle b, a\rangle \in R^{-1}\}$$
$$= \{a \in A : (\exists b \in Y)\langle a, b\rangle \in R\}$$

- $a \in R^{-1}[Y]$, akk $(\exists b \in Y)\langle a, b\rangle \in R$, akk $\exists b(b \in Y \wedge \langle a, b\rangle \in R)$
- ak $A = B = \mathbb{N}$ a $R = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$, tak:
  - $R^{-1}[\{1\}] = \{1\}$
  - $R^{-1}[\{2\}] = \emptyset$
  - $R^{-1}[\{3\}] = \{1, 2\}$
  - $R^{-1}[\{5\}] = \{2\}$
  - $R^{-1}[\{1, 3\}] = \{1, 2\}$
  - $R^{-1}[\{1, 3, 5\}] = \{1, 2\}$
  - $R^{-1}[\emptyset] = \emptyset$

skladanie relácií

- **zložením relácií** R na $A \times B$ a S na $B \times C$ nazývame triedu
$$\{\langle a,c\rangle \in A \times C : (\exists b \in B)((\langle a,b\rangle \in R) \wedge (\langle b,c\rangle \in S))\}$$
a označujeme ju $R \circ S$
- $\langle a,c\rangle \in (R \circ S)$, akk $(\exists b \in B)((\langle a,b\rangle \in R) \wedge (\langle b,c\rangle \in S))$
- ak $R = \{\langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,3\rangle\}$ a $S = \{\langle 3,5\rangle, \langle 3,6\rangle, \langle 4,7\rangle\}$,

R

1	3
1	4
2	3

S

3	5
3	6
4	7

tak $R \circ S = \{\langle 1,5\rangle, \langle 1,6\rangle, \langle 1,7\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 2,6\rangle\}$

$R \circ S$

1	5
1	6
1	7
2	5
2	6

skladanie relácií

- príklady:
  - zloženie relácie *byť dieťaťom* s reláciou *byť rodičom* je relácia *byť (vlastným alebo nevlastným) súrodencom (včítane seba)*
  - zloženie relácie *byť rodičom* so samou sebou je relácia *byť starým rodičom*
  - zloženie relácie *byť dieťaťom* so samou sebou je relácia *byť vnúčaťom*

skladanie relácií je asociatívne

- ak $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ a $T \subseteq C \times D$,
  tak
  $$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$$
  - $\langle a, d\rangle \in ((R \circ S) \circ T)$,
    akk $(\exists c \in C)(\langle a, c\rangle \in (R \circ S) \wedge \langle c, d\rangle \in T)$
    (podľa definície zloženia),
    akk $(\exists c \in C)(((\exists b \in B)(\langle a, b\rangle \in R \wedge \langle b, c\rangle \in S)) \wedge \langle c, d\rangle \in T)$
    (podľa definície zloženia),
    akk $(\exists c \in C)(\exists b \in B)((\langle a, b\rangle \in R \wedge \langle b, c\rangle \in S) \wedge \langle c, d\rangle \in T)$
    (lebo tvrdenie $\langle c, d\rangle \in T$ neobsahuje b),
    akk $(\exists c \in C)(\exists b \in B)(\langle a, b\rangle \in R \wedge (\langle b, c\rangle \in S \wedge \langle c, d\rangle \in T))$
    (lebo konjunkcia je asociatívna),
    akk $(\exists b \in B)(\exists c \in C)(\langle a, b\rangle \in R \wedge (\langle b, c\rangle \in S \wedge \langle c, d\rangle \in T))$
    (výmena kvantifikátorov rovnakého druhu),
    akk $(\exists b \in B)(\langle a, b\rangle \in R \wedge ((\exists c \in C)(\langle b, c\rangle \in S \wedge \langle c, d\rangle \in T)))$
    (lebo tvrdenie $\langle a, b\rangle \in R$ neobsahuje c),
    akk $(\exists b \in B)(\langle a, b\rangle \in R \wedge \langle b, d\rangle \in (S \circ T))$
    (podľa definície zloženia),
    akk $\langle a, d\rangle \in (R \circ (S \circ T))$
    (podľa definície zloženia)

skladanie relácií nie je komutatívne

- nech

R

1	3
1	4
2	3

S

3	5
3	6
4	7

- potom

$R \circ S$

1	5
1	6
1	7
2	5
2	6

- ale $S \circ R = \emptyset$

inverzná relácia k zloženej relácii

- ak $R \subseteq A \times B$ a $S \subseteq B \times C$, tak
$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$$
  - $\langle c, a\rangle \in (R \circ S)^{-1}$,
    akk $\langle a, c\rangle \in (R \circ S)$
    (podľa definície inverznej relácie),
    akk $(\exists b \in B)(\langle a, b\rangle \in R \wedge \langle b, c\rangle \in S)$
    (podľa definície zloženia),
    akk $(\exists b \in B)(\langle b, a\rangle \in R^{-1} \wedge \langle c, b\rangle \in S^{-1})$
    (podľa definície inverznej relácie),
    akk $(\exists b \in B)(\langle c, b\rangle \in S^{-1} \wedge \langle b, a\rangle \in R^{-1})$
    (lebo konjunkcia je komutatívna),
    akk $\langle c, a\rangle \in (S^{-1} \circ R^{-1})$
    (podľa definície zloženia)

skladanie a tranzitivita

- R je tranzitívna práve vtedy, keď $(R \circ R) \subseteq R$
  - $\boxed{\rightarrow}$
    - $\langle x, z \rangle \in (R \circ R)$,
      akk $\exists y(\langle x, y \rangle \in R \land \langle y, z \rangle \in R)$
      (podľa definície zloženia relácií),
      ztv $\exists y(\langle x, z \rangle \in R)$
      (lebo podľa predpokladu je R tranzitívna),
      ztv $\langle x, z \rangle \in R$
      (lebo tvrdenie $\langle x, z \rangle \in R$ neobsahuje y)
  - $\boxed{\leftarrow}$
    - $\langle x, y \rangle \in R \land \langle y, z \rangle \in R$,
      ztv $\langle x, z \rangle \in (R \circ R)$
      (podľa definície zloženia relácií),
      ztv $\langle x, z \rangle \in R$
      (lebo podľa predpokladu $(R \circ R) \subseteq R$)

identita

- pod **identitou na triede** A budeme rozumieť triedu
$$\{\langle x, x\rangle : x \in A\}$$
a označovať ju budeme id_A
- ak $A = \{1, 2, 3\}$,
tak $\mathrm{id}_A = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$
- identita je teda len iné meno pre príslušnú reláciu rovnosti
- ak R je relácia na $A \times B$, tak:
    - $R \circ \mathrm{id}_B = R$
    - $\mathrm{id}_A \circ R = R$

identita a reflexivita

- R je reflexívna na A práve vtedy, keď $\mathrm{id}_A \subseteq R$
  - R je reflexívna na A,
    akk $(\forall x \in A)\langle x, x\rangle \in R$
    (podľa definície reflexivity),
    akk $\{\langle x, x\rangle : x \in A\} \subseteq R$
    (prepis),
    akk $\mathrm{id}_A \subseteq R$
    (podľa definície id_A)

identita a antireflexivita

- R je antireflexívna na A práve vtedy, keď $\mathrm{id}_A \cap R = \emptyset$
  - R je antireflexívna na A,
    akk $(\forall x \in A)\langle x, x\rangle \notin R$
    (podľa definície antireflexivity),
    akk $\{\langle x, x\rangle : x \in A\} \cap R = \emptyset$
    (prepis),
    akk $\mathrm{id}_A \cap R = \emptyset$
    (podľa definície id_A)

identita a antisymetria

- R na A je antisymetrická práve vtedy, keď $R \cap R^{-1} \subseteq \mathrm{id}_A$
  - $\boxed{\rightarrow}$
    - $\langle x, y \rangle \in (R \cap R^{-1})$,
      akk $(\langle x, y \rangle \in R) \wedge (\langle x, y \rangle \in R^{-1})$
      (podľa definície prieniku),
      akk $(\langle x, y \rangle \in R) \wedge (\langle y, x \rangle \in R)$
      (podľa definície inverznej relácie),
      ztv $x = y$
      (lebo podľa predpokladu je R antisymetrická),
      akk $\langle x, y \rangle \in \mathrm{id}_A$
      (podľa definície id_A, lebo $x = y$)
  - $\boxed{\leftarrow}$
    - $(\langle x, y \rangle \in R) \wedge (\langle y, x \rangle \in R)$,
      akk $(\langle x, y \rangle \in R) \wedge (\langle x, y \rangle \in R^{-1})$
      (podľa definície inverznej relácie),
      akk $\langle x, y \rangle \in (R \cap R^{-1})$
      (podľa definície prieniku),
      ztv $\langle x, y \rangle \in \mathrm{id}_A$
      (lebo podľa predpokladu $R \cap R^{-1} \subseteq \mathrm{id}_A$),
      akk $x = y$
      (podľa definície id_A)

iterovanie relácie

- nech R je relácia
- reláciu $R \circ R$ označíme $R^{(2)}$
- ak $R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle\}$,
  tak $R^{(2)} = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle\}$
- ak $n \geq 2$, tak reláciu $R^{(n)} \circ R$ označíme $R^{(n+1)}$
- ak $R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle\}$,
  tak $R^{(3)} = \{\langle 1, 4\rangle\}$, $R^{(4)} = \emptyset$, $R^{(5)} = R^{(6)} = R^{(7)} = \cdots = \emptyset$
- $R^{(1)}$ bude znamenať R
- takže ak $n \in \mathbb{N}^+$, tak
$$R^{(n)} = \underbrace{R \circ \ldots \circ R}_{n\text{-krát}}$$
- príklady:
  - ak R je relácia *byť rodičom*,
    tak $R^{(3)}$ je relácia *byť prastarým rodičom*
  - ak R je relácia *byť dieťaťom*,
    tak $R^{(3)}$ je relácia *byť pravnúčaťom*
  - ak R je relácia *byť nasledovníkom* na $\mathbb{N}$,
    tak $R^{(n)}$ je relácia *byť o n väčší*

tranzitívny uzáver

- **tranzitívnym uzáverom relácie** nazývame najmenšiu tranzitívnu reláciu, ktorá je jej nadtriedou
- tranzitívna relácia sa zhoduje so svojím tranzitívnym uzáverom
- tranzitívny uzáver relácie R označujeme $R^{(+)}$
- ak R je relácia, tak

$$R^{(+)} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} R^{(n)} = R^{(1)} \cup R^{(2)} \cup R^{(3)} \cup \cdots$$

- ak $R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,4\rangle\}$,
  tak $R^{(+)} = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,4\rangle\}$
- príklady:
  - ak R je relácia *byť rodičom*,
    tak $R^{(+)}$ je relácia *byť predkom*
  - ak R je relácia *byť dieťaťom*,
    tak $R^{(+)}$ je relácia *byť potomkom*
  - ak R je relácia *byť priamym podriadeným*,
    tak $R^{(+)}$ je relácia *byť podriadeným*
  - ak R je relácia *byť nasledovníkom* na množine $\mathbb{N}$,
    tak $R^{(+)}$ je relácia $>$ (na $\mathbb{N}$)

reflexívno-tranzitívny uzáver

- **reflexívno-tranzitívnym uzáverom relácie** (na danej triede) nazývame najmenšiu reflexívnu a tranzitívnu reláciu, ktorá je jej nadtriedou
- reflexívna a tranzitívna relácia sa zhoduje so svojím reflexívno-tranzitívnym uzáverom
- reflexívno-tranzitívny uzáver relácie R na triede A označujeme $R_A^{(*)}$
- ak R je relácia na triede A, tak

$$R_A^{(*)} = \mathrm{id}_A \cup R^{(+)}$$

- ak $A = \{1,2,3,4\}$ a $R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,4\rangle\}$, tak $R_A^{(*)} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,4\rangle\}$
- príklad:
  - ak R je relácia *byť nasledovníkom* na množine $\mathbb{N}$, tak $R_{\mathbb{N}}^{(*)}$ je relácia $\geq$ (na $\mathbb{N}$)