

# 5

## RELÁCIE

# príklad

- ak  $a$  a  $b$  sú prirodzené čísla, pýtame sa, či  $a$  delí  $b$
- odpoveď môže byť pozitívna (✓) alebo negatívna (×):

	0	1	2	3	4	5	6	...
0	✓	×	×	×	×	×	×	...
1	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	...
2	✓	×	✓	×	✓	×	✓	...
3	✓	×	×	✓	×	×	✓	...
4	✓	×	×	×	✓	×	×	...
5	✓	×	×	×	×	✓	×	...
6	✓	×	×	×	×	×	✓	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

- všetky dvojice s pozitívnou odpoveďou združíme do množiny a tú označíme práve znakom „|“
- $a$  delí  $b$  práve vtedy, keď  $\langle a, b \rangle \in |$
- takže napríklad  $\langle 2, 4 \rangle \in |$ , lebo 2 delí 4, ale  $\langle 4, 2 \rangle \notin |$ , lebo 4 nedelí 2
- vzťah „|“ je teda istá podmnožina množiny  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

# relácia

- ak  $A$  a  $B$  sú triedy,  
tak každú podtriedu triedy  $A \times B$  nazveme  
**binárna relácia** (alebo skrátene **relácia**) (na tomto súčine)
- často  $A = B$ ;  
v takom prípade hovoríme o **relácii na triede  $A$**
- napríklad „|“ je relácia na množine  $\mathbb{N}$
- ak  $R$  je relácia na triede  $A$  a  $x$  a  $y$  sú prvky  $A$ ,  
tak namiesto  $\langle x, y \rangle \in R$  píšeme  $x R y$
- ak  $A_1, \dots, A_n$  sú triedy,  
tak každú podtriedu triedy  $A_1 \times \dots \times A_n$  nazveme  
 **$n$ -árna relácia** (na tomto súčine)

# (binárne) relácie

- binárne relácie vyjadrujú **vzťah** medzi **dvoma** objektmi rovnakého alebo rôzneho typu
- príklady binárnych relácií medzi objektmi rovnakého typu:
  - *deliteľnosť*  
je relácia na množine  $\mathbb{N}$  (prípadne na množine  $\mathbb{Z}$ )
  - porovnania  $\leq, \geq, <, >, =, \neq$   
sú relácie na množine  $\mathbb{R}$
  - *zhodnosť, podobnosť*  
sú relácie na množine geometrických útvarov
  - *rovnobežnosť, rôznobežnosť, kolmost*  
sú relácie na množine priamok
  - *byť manželom alebo manželkou, byť súrodencom, byť dieťaťom (niekoho), byť rodičom, byť predkom, byť potomkom, byť priateľom, poznať sa, páčiť sa, byť podriadeným, byť nadriadeným*  
sú relácie na množine ľudí
  - *byť spojené priamym spojom, dostupnosť*  
sú relácie na množine miest
  - ...

# (binárne) relácie

- príklady binárnych relácií medzi objektmi rôzneho typu:
  - *vynikať v* je relácia medzi ľuďmi a aktivitami
  - *mat' (také a také) auto* je relácia medzi ľuďmi a autami
  - *prejavovať sa* je relácia medzi chorobami a príznakmi
  - ...
- príklady **ne**binárnych relácií:
  - *byť prvočísлом* (týka sa len jedného objektu)
  - *byť medzi* (týka sa troch objektov)

# symetrickosť

- reláciu  $R$  na triede  $A$  nazveme **symetrická**, ak

$$(\forall x, y \in A)(x R y \rightarrow y R x)$$

- $\rightarrow$  v definícii môžeme nahradiť  $\leftrightarrow$
- príklady symetrických relácií:
  - *byť manželom, byť súrodencom, byť priateľom, poznať sa*
  - *rovnobežnosť, rôznobežnosť, kolmosť*
  - *podobnosť, zhodnosť*
  - *byť spojené priamym spojmom, dostupnosť*
  - $=, \neq$
- príklady nesymetrických relácií:
  - *byť rodičom, byť dieťaťom, byť potomkom, byť predkom, páčiť sa*
  - *deliteľnosť*
  - $<, >, \leq, \geq$
  - $\subseteq, \supseteq$

# antisymetrickosť

- reláciu  $R$  na triede  $A$  nazveme **antisymetrická**, ak

$$(\forall x, y \in A)((x R y) \wedge (y R x)) \rightarrow (x = y)$$

- antisymetria nie je opak symetrie!
- príklady antisymetrických relácií:
  - $=, <, >, \leq, \geq$
  - deliteľnosť na množine  $\mathbb{N}$*
  - $\subseteq, \supseteq$
- príklady neantisymetrických relácií:
  - $\neq$
  - deliteľnosť na množine  $\mathbb{Z}$*

# tranzitívnosť

- reláciu  $R$  na triede  $A$  nazveme **tranzitívna**, ak

$$(\forall x, y, z \in A)((x R y) \wedge (y R z)) \rightarrow (x R z))$$

- príklady tranzitívnych relácií:

- $=, <, >, \leq, \geq$
- *deliteľnosť* (na množine  $\mathbb{N}$  i na množine  $\mathbb{Z}$ )
- $\subseteq, \supseteq$
- *rovnobežnosť*
- *zhodnosť, podobnosť*
- *byť predkom, byť potomkom, mať tých istých rodičov*
- *dostupnosť*
- *byť podriadeným v hierarchii*

- príklady netranzitívnych relácií:

- $\neq$
- *rôznobežnosť, kolmosť*
- *byť priateľom, poznať sa, mať toho istého rodiča*
- *byť spojené priamym spojom*
- *byť priamym podriadeným v hierarchii*



# reflexívnosť

- reláciu  $R$  na triede  $A$  nazveme **reflexívna**, ak

$$(\forall x \in A)(x R x)$$

- príklady reflexívnych relácií:
  - $=, \leq, \geq$
  - *deliteľnosť* (na množine  $\mathbb{N}$  i na množine  $\mathbb{Z}$ )
  - $\subseteq, \supseteq$
  - *rovnobežnosť*
  - *zhodnosť, podobnosť*
  - *byť spojené priamym spojmom, dostupnosť*
- príklady nereflexívnych relácií:
  - $<, >, \neq$
  - *rôznobežnosť, kolmost'*

# antireflexívnosť

- reláciu  $R$  na triede  $A$  nazveme **antireflexívna**, ak

$$(\forall x \in A) \neg(x R x)$$

- antireflexívnosť nie je opak reflexívnosti!
- príklady antireflexívnych relácií:
  - $<, >, \neq$
  - kolmosť, rôznobežnosť*
  - byť rodičom, byť dieťaťom*
- príklady neantireflexívnych relácií:
  - $=, \leq, \geq$
  - deliteľnosť*
  - $\subseteq, \supseteq$

# úplnosť

- reláciu  $R$  na triede  $A$  nazveme **úplná**, ak

$$(\forall x, y \in A)((x R y) \vee (y R x))$$

- príklady úplných relácií:
  - $\leq, \geq$
  - *byť aspoň taký starý*
- príklady neúplných relácií:
  - $<, >, =, \neq$
  - *deliteľnosť*
  - $\subseteq, \supseteq$