# 4

# ĎALŠIE OPERÁCIE

# systém množín

- nech $I$ je neprázdna trieda
- nech pre každé $i$ z triedy $I$ je $A_i$ množina
- potom $\{A_i : i \in I\}$ nazývame **systém množín**
- triedu $I$ nazývame **indexová trieda**
  a jej prvky **indexy**
- ak je $I$ množina, aj $\{A_i : i \in I\}$ je množina
- príklady:
  - ak $I = \{1, 2\}$,
    systém množín tvoria množiny $A_1$ a $A_2$
  - ak $I = \{7, 8, 9\}$,
    systém množín tvoria množiny $A_7, A_8$ a $A_9$
  - ak $I = \{1\}$,
    systém množín pozostáva len z množiny $A_1$
  - ak $I = \mathbb{N}$,
    systém množín pozostáva z množín $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots$
  - ak $I = \mathbb{R}$,
    v systéme sú napríklad množiny $A_0, A_1, A_{-1}, A_{\sqrt{2}}, A_{\mathrm{e}}$ atď.
  - ak $I = \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$,
    systém množín tvoria množiny $A_\heartsuit, A_\diamondsuit, A_\clubsuit$ a $A_\spadesuit$

# prienik systému množín

- **prienikom systému množín** nazývame množinu objektov, ktoré patria do všetkých množín systému zároveň
- prienik systému množín $\{A_i : i \in I\}$ značíme

$$\bigcap_{i \in I} A_i$$

- $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$, akk $(\forall i \in I)(x \in A_i)$
- príklady:
  - $\bigcap_{i \in \{1,2\}} A_i = A_1 \cap A_2$
  - $\bigcap_{i \in \{7,8,9\}} A_i = A_7 \cap A_8 \cap A_9$
  - $\bigcap_{i \in \{1\}} A_i = A_1$
  - $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap \ldots$
  - $\bigcap_{i \in \{\heartsuit,\diamondsuit,\clubsuit,\spadesuit\}} A_i = A_\heartsuit \cap A_\diamondsuit \cap A_\clubsuit \cap A_\spadesuit$

# príklad

- nech pre každé prirodzené číslo $n$ platí
  $A_n = \{x \in \mathbb{N} : x \geq n\} = \{n, n+1, n+2, n+3, \dots\}$
- potom:
  - $\bigcap_{i \in \{0\}} A_i = A_0 =$
    $= \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$
  - $\bigcap_{i \in \{0,1\}} A_i = A_0 \cap A_1 =$
    $= \{0, 1, 2, 3, \dots\} \cap \{1, 2, 3, \dots\} = \{1, 2, 3, \dots\} = A_1$
  - $\bigcap_{i \in \{0,1,2\}} A_i = A_0 \cap A_1 \cap A_2 =$
    $= \{0, 1, 2, 3, \dots\} \cap \{1, 2, 3, \dots\} \cap \{2, 3, \dots\} = \{2, 3, \dots\} = A_2$
  - ak $a \leq b$, tak
    $\bigcap_{i \in \{a,b\}} A_i = A_a \cap A_b$
    $= \{a, a+1, \dots, b, b+1, \dots\} \cap \{b, b+1, \dots\} =$
    $= \{b, b+1, \dots\} = A_b$
  - ak $M$ je konečná podmnožina $\mathbb{N}$, tak
    $\bigcap_{i \in M} A_i = A_{\max(M)}$
  - $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \emptyset$
  - ak $M$ je nekonečná podmnožina $\mathbb{N}$, tak
    $\bigcap_{i \in M} A_i = \emptyset$

# príklad

- nech pre každé prirodzené číslo $n$ platí
  $B_n = \{x \in \mathbb{N} : n \mid x\} = \{0, n, 2n, 3n, \dots\}$
- potom:
  - $\bigcap_{j\in\{0\}} B_j = B_0 = \{0\}$
  - $\bigcap_{j\in\{2,4\}} B_j = B_2 \cap B_4 =$
    $= \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\} \cap \{0, 4, 8, \dots\} = \{0, 4, 8, \dots\} = B_4$
  - ak $a \mid b$, tak
    $\bigcap_{j\in\{a,b\}} B_j = B_a \cap B_b =$
    $= \{0, a, 2a, \dots, b, \dots, 2b, \dots\} \cap \{0, b, 2b, \dots\} =$
    $= \{0, b, 2b, \dots\} = B_b$
  - $\bigcap_{j\in\{4,6\}} B_j = B_4 \cap B_6 =$
    $= \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, \dots\} \cap \{0, 6, 12, 18, 24, \dots\} =$
    $= \{0, 12, 24, \dots\} = B_{12}$
  - ak najmenší spoločný násobok čísel $a$ a $b$ je $c$, tak
    $\bigcap_{j\in\{a,b\}} B_j = B_a \cap B_b =$
    $= \{0, a, 2a, \dots, c, \dots, 2c, \dots\} \cap \{0, b, 2b, \dots, c \dots, 2c \dots\} =$
    $= \{0, c, 2c, \dots\} = B_c$
  - ak $M$ je množina všetkých prvočísel, tak
    $\bigcap_{j\in M} B_j = \{0\}$

# príklad

- nech pre každé reálne číslo $r$ platí
  $C_r = \{x \in \mathbb{R} : x \geq r\} = [r, \infty)$
- potom:
  - $\bigcap_{r \in [0,1]} C_r = [1, \infty) = C_1$
  - $\bigcap_{r \in [0,1)} C_r = [1, \infty) = C_1$
  - ak $b = \sup M$,
    tak $\bigcap_{r \in M} C_r = [b, \infty) = C_b$
  - $\bigcap_{r \in \mathbb{R}} C_r = \emptyset$
  - ak je $M$ zhora neohraničená,
    tak $\bigcap_{r \in M} C_r = \emptyset$

# zjednotenie systému množín

- **zjednotením systému množín** nazývame triedu objektov, ktoré patria do aspoň do jednej z množín systému
- zjednotenie systému množín $\{A_i : i \in I\}$ značíme

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

- $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, akk $(\exists i \in I)(x \in A_i)$
- príklady:
  - $\bigcup_{i \in \{1,2\}} A_i = A_1 \cup A_2$
  - $\bigcup_{i \in \{7,8,9\}} A_i = A_7 \cup A_8 \cup A_9$
  - $\bigcup_{i \in \{1\}} A_i = A_1$
  - $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots$
  - $\bigcup_{i \in \{\heartsuit,\diamondsuit,\clubsuit,\spadesuit\}} A_i = A_\heartsuit \cup A_\diamondsuit \cup A_\clubsuit \cup A_\spadesuit$

# príklad

- nech pre každé prirodzené číslo $n$ platí
  $A_n = \{x \in \mathbb{N} : x \leq n\} = \{0, 1, \dots, n\}$
- potom:
  - $\bigcup_{i \in \{0\}} A_i = A_0 = \{0\}$
  - $\bigcup_{i \in \{3,5\}} A_i = A_3 \cup A_5 =$
    $= \{0, 1, 2, 3\} \cup \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = A_5$
  - ak $a \leq b$, tak
    $\bigcup_{i \in \{a,b\}} A_i = A_a \cup A_b =$
    $= \{0, 1, \dots, a\} \cup \{0, 1, \dots, a, a + 1, \dots, b\} =$
    $= \{0, 1, \dots, b\} = A_b$
  - ak $M$ je konečná podmnožina $\mathbb{N}$, tak
    $\bigcup_{i \in M} A_i = A_{\max(M)}$
  - $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{N}$
  - ak $M$ je nekonečná podmnožina $\mathbb{N}$, tak
    $\bigcup_{i \in M} A_i = \mathbb{N}$

# príklad

- nech pre každé prirodzené číslo $n$ platí
  $B_n = \{x \in \mathbb{N} : n \mid x\} = \{0, n, 2n, 3n, \dots\}$
- potom:
  - $\bigcup_{j \in \{0\}} B_j = B_0 = \{0\}$
  - $\bigcup_{j \in \{2,4\}} B_j = B_2 \cup B_4 =$
    $= \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\} \cup \{0, 4, 8, \dots\} = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\} = B_2$
  - ak $a \mid b$, tak
    $\bigcup_{j \in \{a,b\}} B_j = B_a \cup B_b =$
    $= \{0, a, 2a, \dots, b, \dots, 2b, \dots\} \cup \{0, b, 2b, \dots\} =$
    $= \{0, a, 2a, \dots\} = B_a$
  - ak $M$ je množina všetkých prvočísel,
    tak $\bigcup_{j \in M} B_j = \{0, 2, 3, 4, 5, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{1\}$

# príklad

- nech pre každé reálne číslo $r$ platí
  $C_r = \{x \in \mathbb{R} : x < r\} = (-\infty, r)$
- potom:
  - $\bigcup_{r\in[0,1]} C_r = (-\infty, 1) = C_1$
  - $\bigcup_{r\in[0,1)} C_r = (-\infty, 1) = C_1$
  - ak $b = \sup M$,
    tak $\bigcup_{r\in M} C_r = (-\infty, b) = C_b$
  - $\bigcup_{r\in\mathbb{R}} C_r = \mathbb{R}$
  - ak $M$ je zhora neohraničená,
    tak $\bigcup_{r\in M} C_r = \mathbb{R}$

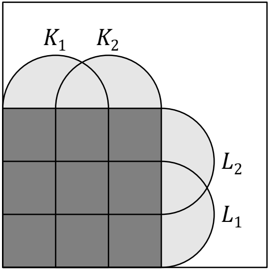
# príklad

- ak $K$ je trieda a $\{L_i : i \in I\}$ je systém množín, platí
$$K \setminus \bigcup_{i \in I} L_i = \bigcap_{i \in I} (K \setminus L_i)$$
- $x \in (K \setminus \bigcup_{i \in I} L_i)$,
akk $(x \in K) \wedge \neg(x \in \bigcup_{i \in I} L_i)$,
(definícia rozdielu),
akk $(x \in K) \wedge \neg(\exists i \in I)(x \in L_i)$,
(definícia zjednotenia systému množín),
akk $(x \in K) \wedge (\forall i \in I)\neg(x \in L_i)$,
(lebo tvrdenia $\neg(\exists i \in I)\varphi$ a $(\forall i \in I)\neg\varphi$ sú ekvivalentné),
akk $(\forall i \in I)((x \in K) \wedge \neg(x \in L_i))$,
(lebo tvrdenie $x \in K$ neobsahuje $i$),
akk $(\forall i \in I)(x \in (K \setminus L_i))$,
(definícia rozdielu),
akk $x \in \bigcap_{i \in I}(K \setminus L_i)$
(definícia prieniku systému množín)

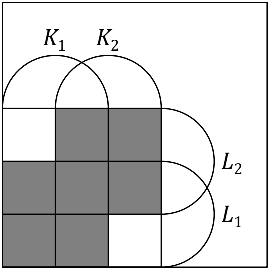
# príklad

- ak $\{K_i : i \in I\}$ a $\{L_i : i \in I\}$ sú systémy množín,
  treba rozhodnúť, ktoré z inklúzií medzi triedami
  $$\bigcup_{i\in I} K_i \cap \bigcup_{i\in I} L_i \quad \text{a} \quad \bigcup_{i\in I}(K_i \cap L_i)$$
  platia
- ak (napríklad) $I = \{1, 2\}$, tak platí:
  - $\bigcup_{i\in I} K_i \cap \bigcup_{i\in I} L_i = (K_1 \cup K_2) \cap (L_1 \cup L_2)$
  - $\bigcup\limits_{i\in I}(K_i \cap L_i) = (K_1 \cap L_1) \cup (K_2 \cap L_2)$
- 

$(K_1 \cup K_2) \cap (L_1 \cup L_2)$




$(K_1 \cap L_1) \cup (K_2 \cap L_2)$



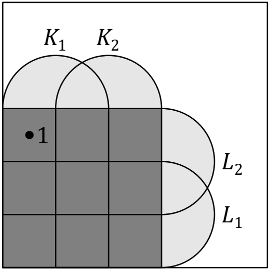
# príklad

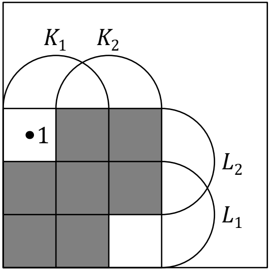
- $\boxed{\supseteq}$
  - $x \in \bigcup_{i \in I}(K_i \cap L_i)$,
    akk $(\exists i \in I)(x \in (K_i \cap L_i))$
    (definícia zjednotenia systému množín),
    akk $(\exists i \in I)((x \in K_i) \wedge (x \in L_i))$
    (definícia prieniku),
    ztv $(\exists i \in I)(x \in K_i) \wedge (\exists i \in I)(x \in L_i)$
    (distribúcia kvantifikátora),
    akk $(x \in \bigcup_{i \in I} K_i) \wedge (x \in \bigcup_{i \in I} L_i)$
    (definícia zjednotenia systému množín),
    akk $x \in (\bigcup_{i \in I} K_i \cap \bigcup_{i \in I} L_i)$
    (definícia prieniku)

# príklad

- $\boxed{\not\subseteq}$
  - nech $I = \{1, 2\}$, $K_1 = \{1\}$, $K_2 = \emptyset$, $L_1 = \emptyset$, $L_2 = \{1\}$

$(K_1 \cup K_2) \cap (L_1 \cup L_2)$ $(K_1 \cap L_1) \cup (K_2 \cap L_2)$




  - potom:
    - $\bigcup_{i \in I} K_i \cap \bigcup_{i \in I} L_i$
      $= (K_1 \cup K_2) \cap (L_1 \cup L_2)$
      $= (\{1\} \cup \emptyset) \cap (\emptyset \cup \{1\}) = \{1\} \cap \{1\} = \{1\}$
    - $\bigcup_{i \in I} (K_i \cap L_i)$
      $= (K_1 \cap L_1) \cup (K_2 \cap L_2)$
      $= (\{1\} \cap \emptyset) \cup (\emptyset \cap \{1\}) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$

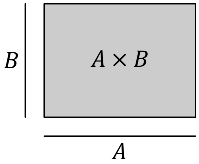
# usporiadaná dvojica

- ak $a$ a $b$ sú objekty,
  množinu $\{\{a, b\}, \{a\}\}$ budeme nazývať
  **usporiadaná dvojica** so **zložkami** $a$ a $b$
  a označovať
  $$\langle a, b \rangle$$
- usporiadané dvojice $\langle a_1, b_1 \rangle$ a $\langle a_2, b_2 \rangle$ sú totožné práve vtedy,
  keď $a_1 = a_2$ a $b_1 = b_2$
- napríklad $\langle 1, 2 \rangle \neq \langle 2, 1 \rangle$
  (hoci $\{1, 2\} = \{2, 1\}$)

# usporiadaná tica

- ak $n \geq 2$ a $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ sú objekty,
  tak
  $$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} \rangle$$
  bude znamenať usporiadanú dvojicu $\langle\langle a_1, a_2 \ldots, a_n\rangle, a_{n+1}\rangle$
- kvôli úplnosti:
  - ak $a$ je objekt,
    tak $\langle a \rangle$ bude znamenať $a$
  - $\langle\rangle$ bude znamenať $\emptyset$
- ak $n \in \mathbb{N}$ a $a_1, \ldots, a_n$ sú objekty,
  tak $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ budeme nazývať **usporiadaná $n$-tica**
- ak $n$ nie je špecifikované, hovoríme o **usporiadanej tici**
- usporiadané $n$-tice $\langle a_1^1, \ldots, a_n^1 \rangle$ a $\langle a_1^2, \ldots, a_n^2 \rangle$
  sú totožné práve vtedy, keď $a_1^1 = a_1^2, \ldots, a_n^1 = a_n^2$
- napríklad $\langle 1, 2, 3, 4 \rangle \neq \langle 1, 2, 4, 3 \rangle$
  (hoci $\{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 4, 3\}$)

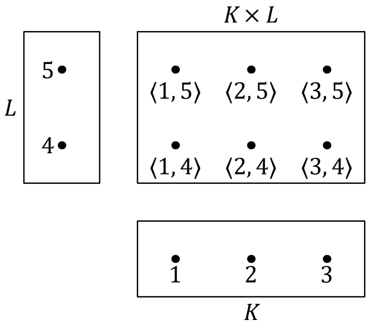
# karteziánsky súčin

- **karteziánskym súčinom** (alebo len **súčinom**) tried $A$ a $B$ nazývame triedu práve všetkých usporiadaných dvojíc, ktorých prvá zložka je z triedy $A$ a druhá z triedy $B$
- súčin tried $A$ a $B$ označujeme $A \times B$
- $$\begin{aligned} A \times B &= \{t : (\exists a \in A)(\exists b \in B) t = \langle a, b \rangle\} \\ &= \{\langle a, b \rangle : (a \in A) \wedge (b \in B)\} \end{aligned}$$
- $\langle a, b \rangle \in A \times B$, akk $(a \in A) \wedge (b \in B)$
- 

- súčin nie je komutatívny ani asociatívny
- ak sú $A$ a $B$ množiny, aj $A \times B$ je množina

# príklad

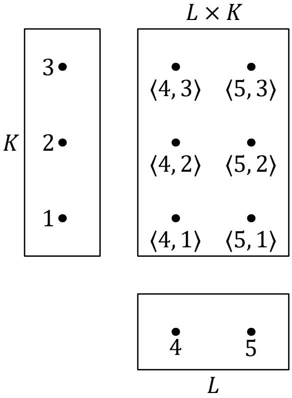
- ak $K = \{1, 2, 3\}$ a $L = \{4, 5\}$, tak
$$K \times L = \{\langle 1,4\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 3,5\rangle\}$$
-



# príklad

- ak $K = \{1, 2, 3\}$ a $L = \{4, 5\}$, tak

$$L \times K = \{\langle 4, 1\rangle, \langle 4, 2\rangle, \langle 4, 3\rangle, \langle 5, 1\rangle, \langle 5, 2\rangle, \langle 5, 3\rangle\}$$



# karteziánsky súčin viacerých tried

- nech $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$, kde $n \geq 2$, sú triedy;
  potom
$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times A_{n+1} = (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) \times A_{n+1}$$

- takže
$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{\langle a_1, \ldots, a_n \rangle : (a_1 \in A_1) \wedge \ldots \wedge (a_n \in A_n)\}$$
- ak $A_1 = \cdots = A_n = A$, namiesto $A_1 \times \cdots \times A_n$ píšeme aj $A^n$
  - $\mathbb{N}^2$ je množina všetkých dvojíc prirodzených čísel
  - $\mathbb{R}^3$ je množina všetkých trojíc reálnych čísel
- dodefinujeme $A^1 = A$
- dodefinujeme $A^0 = \{\emptyset\}$