3

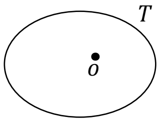
TRIEDY A MNOŽINY

trieda

- **trieda** je isté **zoskupenie objektov**
  (bez akéhokoľvek ohľadu na vzťahy medzi nimi)
- tieto objekty nazývame **prvkami** tejto triedy
  a hovoríme, že do tejto triedy **patria**
  a že táto trieda ich **obsahuje**
- to, že objekt o patrí do triedy T, zapisujeme

$$o \in T$$

- grafické znázornenie:



- o každom objekte musí byť jasné,
  či do triedy patrí, alebo nie

trieda

- trieda je obvykle **definovaná vlastnosťou** jej prvkov
  - nech φ je tvrdenie s parametrom x
  - objekt o patrí do tejto triedy práve vtedy,
    keď je v prípade, že premenná x má hodnotu o, tvrdenie φ pravdivé
  - takúto triedu potom označujeme

$$\{x : \varphi\}$$

    - nie $\{\forall x : \varphi\}$!
    - $\{x : (x \in \mathbb{N}) \wedge (2 \mid x) \wedge (x < 10)\}$
      je trieda obsahujúca práve prvky 0, 2, 4, 6, 8
  - trieda $\{x : (x = o_1) \vee \ldots \vee (x = o_n)\}$
    teda obsahuje práve prvky $o_1, \ldots, o_n$;
    zapisujeme ju

$$\{o_1, \ldots, o_n\}$$

    - trieda $\{x : (x = 0) \vee (x = 2) \vee (x = 4) \vee (x = 6) \vee (x = 8)\}$
      obsahuje práve prvky 0, 2, 4, 6 a 8;
      zapisujeme ju $\{0, 2, 4, 6, 8\}$

trieda

- nech φ a ψ sú tvrdenia s parametrom x
- ak pre každú hodnotu premennej x sú tvrdenia φ a ψ ekvivalentné, triedy $\{x : \varphi\}$ a $\{x : \psi\}$ sa rovnajú, sú **identické**
  - nech φ je tvrdenie

    $$(x \in \mathbb{N}) \land (2 \mid x) \land (x < 10)$$

    a ψ (s ním ekvivalentné) tvrdenie

    $$(x = 0) \lor (x = 2) \lor (x = 4) \lor (x = 6) \lor (x = 8)$$

  - potom obe triedy, $\{x : \varphi\}$ a $\{x : \psi\}$,
    obsahujú práve prvky 0, 2, 4, 6 a 8,
    sú teda identické
  - **na poradí** objektov v triede **nezáleží**
    - triedy $\{2, 8, 6, 0, 4\}$ a $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ sú identické
    - lebo tvrdenia $(x = o_1) \lor (x = o_2)$ a $(x = o_2) \lor (x = o_1)$ sú ekvivalentné
  - **opakované výskyty** objektu v triede **možno vynechať**
    - triedy $\{0, 2, 2, 4, 6, 8, 0, 0, 8\}$ a $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ sú identické
    - lebo tvrdenia $(x = o) \lor (x = o)$ a $x = o$ sú ekvivalentné

prázdna trieda

- nech φ je tvrdenie s parametrom x
- ak pre každú hodnotu premennej x je tvrdenie φ nepravdivé, tak trieda $\{x : \varphi\}$ neobsahuje žiaden prvok; nazývame ju **prázdna** trieda a označujeme ju $\emptyset$
- definícia je korektná, lebo nezávisí od φ (iba od jeho stálej (ne)pravdivosti)

skrátené zápisy

- nech T je trieda a φ je tvrdenie s parametrom x
- triedu $\{x : (x \in T) \wedge \varphi\}$ zapisujeme skrátene

$$\{x \in T : \varphi\}$$

  - triedu prirodzených čísel väčších než 10 zapíšeme $\{x \in \mathbb{N} : x > 10\}$

- **relativizované kvantifikátory**
  - zápisom

$$(\exists x \in T)\varphi$$

    rozumieme tvrdenie $\exists x((x \in T) \wedge \varphi)$

    - namiesto $\exists m((m \in \mathbb{N}) \wedge (2 \mid m))$ zapíšeme $(\exists m \in \mathbb{N})2 \mid m$

  - zápisom

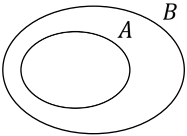
$$(\forall x \in T)\varphi$$

    rozumieme tvrdenie $\forall x((x \in T) \to \varphi)$

    - namiesto $\forall m((m \in \mathbb{N}) \to (2 \mid m))$ zapíšeme $(\forall m \in \mathbb{N})2 \mid m$

inklúzie

- hovoríme, že trieda A je **podtriedou** triedy B
  a že trieda B je **nadtriedou** triedy A,
  a zapisujeme $A \subseteq B$ alebo $B \supseteq A$,
  ak každý prvok triedy A je aj prvkom triedy B,
  t. j. ak platí
  $$\forall x((x \in A) \to (x \in B))$$
- grafické znázornenie:



- príklady
  - $\{0, 1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N}$
  - $\{0, 1, 2, 3\} \supseteq \{0, 1, 2\}$
- $\subseteq$ sa nazýva **inklúzia**,
  $\supseteq$ sa nazýva **opačná inklúzia**
- $\emptyset$ je podtriedou každej triedy
- každá trieda je sama sebe podtriedou i nadtriedou

príklad

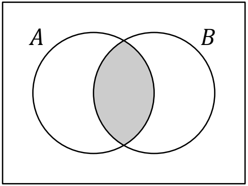
- označme (dočasne) triedy takýchto útvarov v danej rovine:
  - S – štvorce
  - O – obdĺžniky
  - K – kosoštvorce
  - R – rovnobežníky
  - D – deltoidy
  - L – lichobežníky
- (ne)inklúzie medzi týmito triedami:
  - každá z týchto tried je podtriedou sama sebe
  - S je podtrieda všetkých ostatných tried
  - $O \subseteq R$, $O \subseteq L$ platia,
ale $O \subseteq S$, $O \subseteq K$, $O \subseteq D$ neplatia
  - $K \subseteq R$, $K \subseteq D$, $K \subseteq L$ platia,
ale $K \subseteq S$, $K \subseteq O$ neplatia
  - $R \subseteq L$ platí, ale $R \subseteq S$, $R \subseteq O$, $R \subseteq K$, $R \subseteq D$ neplatí
  - D nie je podtriedou žiadnej inej triedy
  - L nie je podtriedou žiadnej inej triedy

inklúzie a rovnosť

- triedy A a B sa rovnajú práve vtedy, keď majú rovnaké prvky, t. j. ak platí
$$(\forall x)((x \in A) \leftrightarrow (x \in B))$$
- $A = B$ práve vtedy, keď $A \subseteq B$ a zároveň $A \supseteq B$

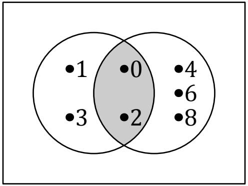
prienik

- **prienikom** dvoch tried voláme triedu všetkých objektov, ktoré patria do oboch týchto tried súčasne
- prienik tried A a B označujeme $A \cap B$
- $A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
- $x \in (A \cap B)$, akk $(x \in A) \wedge (x \in B)$
- grafické znázornenie:



prienik

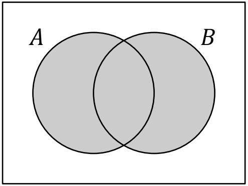
- príklad:
  - $\{0,1,2,3\} \cap \{0,2,4,6,8\} = \{0,2\}$



- prienik je komutatívny a asociatívny
- $\emptyset \cap A = \emptyset$
- $A \cap A = A$
- ak $A \subseteq B$, tak $A \cap B = A$
- dve množiny nazývame **disjunktné**, ak majú prázdny prienik
  - $\{1,2,3\}$ a $\{4,5\}$ sú disjunktné
  - $\{1,2,3\}$ a $\{3,4,5\}$ nie sú disjunktné

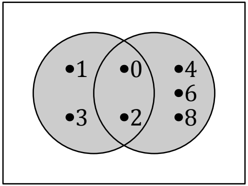
zjednotenie

- **zjednotením** dvoch tried voláme triedu všetkých objektov, ktoré patria aspoň do jednej z nich
- zjednotenie tried A a B označujeme $A \cup B$
- $A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$
- $x \in (A \cup B)$, akk $(x \in A) \vee (x \in B)$
- grafické znázornenie:



zjednotenie

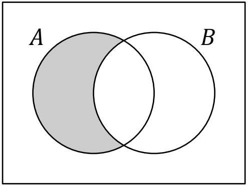
- príklad:
  - $\{0, 1, 2, 3\} \cup \{0, 2, 4, 6, 8\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8\}$



- zjednotenie je komutatívne a asociatívne
- $\emptyset \cup A = A$
- $A \cup A = A$
- ak $A \subseteq B$, tak $A \cup B = B$

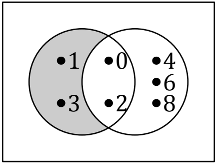
rozdiel

- **rozdielom** dvoch tried voláme triedu všetkých objektov, ktoré patria do prvej z nich, ale do druhej nie
- rozdiel tried A a B označujeme $A \setminus B$
- $A \setminus B = \{x : (x \in A) \wedge \neg(x \in B)\}$
- $x \in (A \setminus B)$, akk $(x \in A) \wedge \neg(x \in B)$
- grafické znázornenie:

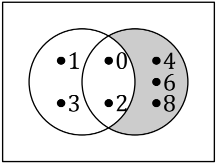


rozdiel

- príklady:
  - $\{0, 1, 2, 3\} \setminus \{0, 2, 4, 6, 8\} = \{1, 3\}$



  - $\{0, 2, 4, 6, 8\} \setminus \{0, 1, 2, 3\} = \{4, 6, 8\}$



- rozdiel nie je komutatívny ani asociatívny
- $A \setminus \emptyset = A$
- $A \setminus A = \emptyset$
- ak $A \subseteq B$, tak $A \setminus B = \emptyset$

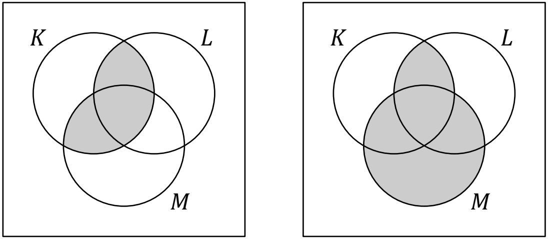
príklad

- máme rozhodnúť, ktoré z inklúzií medzi triedami

$$K \cap (L \cup M) \qquad \text{a} \qquad (K \cap L) \cup M$$

  platia pre každú trojicu tried K, L, M

- $K \cap (L \cup M)$ $\qquad$ $(K \cap L) \cup M$



- obrázky naznačujú, že inklúzia $\subseteq$ bude platiť vždy,
  ale opačná inklúzia $\supseteq$ nie

príklad

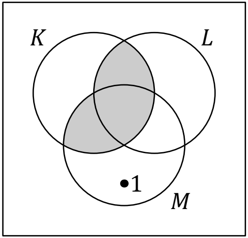
- ukážeme, že inklúzia „$\subseteq$" platí vždy:
- $x \in (K \cap (L \cup M))$,
  akk $(x \in K) \wedge (x \in (L \cup M))$
  (definícia prieniku),
  akk $(x \in K) \wedge ((x \in L) \vee (x \in M))$
  (definícia zjednotenia),
  ztv $((x \in K) \wedge (x \in L)) \vee (x \in M)$
  (lebo $\varphi \wedge (\psi \vee \xi)$ implikuje $(\varphi \wedge \psi) \vee \xi$),
  akk $(x \in (K \cap L)) \vee (x \in M)$
  (definícia prieniku),
  akk $x \in ((K \cap L) \cup M)$
  (definícia zjednotenia)
- každý prvok triedy $K \cap (L \cup M)$
  je aj prvkom triedy $(K \cap L) \cup M$,
  a teda inklúzia

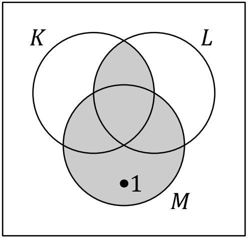
$$K \cap (L \cup M) \subseteq (K \cap L) \cup M$$

  platí

príklad

- ukážeme, že inklúzia „⊇“ neplatí vždy:
- jeden z možných **kontrapríkladov**:
  - nech $K = \emptyset$, $L = \emptyset$, $M = \{1\}$:





  - potom:
    - $K \cap (L \cup M) = \emptyset \cap (\emptyset \cup \{1\}) = \emptyset$
    - $(K \cap L) \cup M = (\emptyset \cap \emptyset) \cup \{1\} = \emptyset \cup \{1\} = \{1\}$
- to teda znamená, že opačná inklúzia

$$K \cap (L \cup M) \supseteq (K \cap L) \cup M$$

neplatí vždy

množina

- niektoré triedy môžu byť prvkami iných tried;
  také nazývame **množiny**
- **nie každá trieda je množina**
  - nech $T = \{x : x \notin x\}$ je množina
  - rozoberme dva prípady:
    - ak platí $T \notin T$,
      tak pre T je splnená podmienka patrenia do množiny T,
      a teda platí $T \in T$, čo je spor
    - ak platí $T \in T$,
      tak podľa definície T platí podmienka $T \notin T$, čo je spor
- množiny musia byť konštruované podľa istých pravidiel
  - prázdna trieda je množina (tzv. **prázdna množina**)
  - prienik, zjednotenie i rozdiel množín je tiež množina
  - podtrieda množiny je tiež množina
  - ...
- v ďalšom budeme často pracovať s množinami
- pri množinách namiesto podtriedy/nadtriedy
  hovoríme o **podmnožine**/**nadmnožine**