2

SPOJKY A KVANTIFIKÁTORY

negácia

- nech φ je nejaké tvrdenie
- tvrdenie „**Nie je pravda, že** φ.“
  nazývame **negácia** tvrdenia φ
- označujeme ho $\neg\varphi$
- **význam**:

φ	$\neg\varphi$
nepravda	pravda
pravda	nepravda

- negácia sa často (nepresne) chápe v širšom zmysle
  ako (každé) tvrdenie s opačnou pravdivostnou hodnotou

negácia

- nech n je prirodzené číslo
  a φ znamená „Číslo n je párne."
- potom $\neg\varphi$ znamená
  „**Nie je pravda, že** číslo n je párne.",
  resp. po štylistickej úprave
  „Číslo n **nie** je párne."
- pravdivosť tohto tvrdenia **závisí** od hodnoty čísla n:
  - ak n je párne,
    tak tvrdenie φ je pravdivé,
    a teda tvrdenie $\neg\varphi$ je nepravdivé
  - ak n je nepárne,
    tak tvrdenie φ je nepravdivé,
    a teda tvrdenie $\neg\varphi$ je pravdivé

konjunkcia

- nech φ a ψ sú nejaké tvrdenia
- tvrdenie „φ **a zároveň** ψ.“, resp. skrátene „φ **a** ψ.“ nazývame **konjunkcia** tvrdení φ a ψ
- označujeme ho $\varphi \wedge \psi$
- **význam**:

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
nepravda	nepravda	nepravda
nepravda	pravda	nepravda
pravda	nepravda	nepravda
pravda	pravda	pravda

- ak má φ pozitívny charakter a ψ negatívny, resp. naopak, namiesto tvrdenia
  „φ **a zároveň** ψ.“
  niekedy používame jeho štylistický variant
  „φ, **ale** ψ.“
  - „n je párne, **ale** n nie je deliteľné tromi.“
    znamená
    „n je párne **a** n nie je deliteľné tromi.“

konjunkcia

- nech n je prirodzené číslo,
  φ znamená „Číslo n je párne."
  a ψ znamená „Číslo n je deliteľné tromi."
- potom $\varphi \wedge \psi$ znamená
  „Číslo n je párne **a zároveň** číslo n je deliteľné tromi.",
  resp. po štylistickej úprave
  „Číslo n je párne **a zároveň** deliteľné tromi."
- pravdivosť tohto tvrdenia **závisí** od hodnoty čísla n:
  - ak n dáva po delení 6 zvyšok 1, 3 alebo 5,
    tak tvrdenie φ je nepravdivé,
    a teda tvrdenie $\varphi \wedge \psi$ je nepravdivé
  - ak n dáva po delení 6 zvyšok 2 alebo 4,
    tak tvrdenie ψ je nepravdivé,
    a teda tvrdenie $\varphi \wedge \psi$ je nepravdivé
  - ak n dáva po delení 6 zvyšok 0,
    tak **obe** tvrdenia φ a ψ sú pravdivé,
    a teda tvrdenie $\varphi \wedge \psi$ je pravdivé

konjunkcia

- nech n je prirodzené číslo,
  φ znamená „Číslo n je párne.“
  a ψ znamená „Číslo n je nepárne.“
- potom $\varphi \land \psi$ znamená
  „Číslo n je párne **a zároveň** číslo n je nepárne.“,
  resp. po štylistickej úprave
  „Číslo n je párne **a zároveň** nepárne.“
- tvrdenie je nepravdivé bez ohľadu na hodnotu čísla n:
  - ak n je párne,
    tak tvrdenie ψ je nepravdivé,
    a teda tvrdenie $\varphi \land \psi$ je nepravdivé
  - ak n je nepárne,
    tak tvrdenie φ je nepravdivé,
    a teda tvrdenie $\varphi \land \psi$ je nepravdivé

disjunkcia

- nech φ a ψ sú nejaké tvrdenia
- tvrdenie „φ **alebo** ψ."
  nazývame **disjunkcia** tvrdení φ a ψ
- označujeme ho $\varphi \vee \psi$
- **význam**:

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
nepravda	nepravda	nepravda
nepravda	pravda	pravda
pravda	nepravda	pravda
pravda	pravda	pravda

- alebo v disjunkcii nemá vylučovací charakter

disjunkcia

- nech n je prirodzené číslo,
  φ znamená „Číslo n je párne.“
  a ψ znamená „Číslo n je deliteľné tromi.“
- potom $\varphi \vee \psi$ znamená
  „Číslo n je párne **alebo** číslo n je deliteľné tromi.“,
  resp. po štylistickej úprave
  „Číslo n je párne **alebo** deliteľné tromi.“
- pravdivosť tohto tvrdenia **závisí** od hodnoty čísla n:
  - ak n dáva po delení 6 zvyšok 0, 2 alebo 4,
    tak tvrdenie φ je pravdivé,
    a teda tvrdenie $\varphi \vee \psi$ je pravdivé
  - ak n dáva po delení 6 zvyšok 3,
    tak tvrdenie ψ je pravdivé,
    a teda tvrdenie $\varphi \vee \psi$ je pravdivé
  - ak n dáva po delení 6 zvyšok 1 alebo 5,
    tak **ani jedno** z tvrdení φ a ψ nie je pravdivé,
    a teda tvrdenie $\varphi \vee \psi$ je nepravdivé

disjunkcia

- nech n je prirodzené číslo,
  φ znamená „Číslo n je párne.“
  a ψ znamená „Číslo n je nepárne.“
- potom $\varphi \vee \psi$ znamená
  „Číslo n je párne **alebo** číslo n je nepárne.“,
  resp. po štylistickej úprave
  „Číslo n je párne **alebo** nepárne.“
- tvrdenie je pravdivé bez ohľadu na hodnotu čísla n:
  - ak n je párne,
    tak tvrdenie φ je pravdivé,
    a teda tvrdenie $\varphi \vee \psi$ je pravdivé
  - ak n je nepárne,
    tak tvrdenie ψ je pravdivé,
    a teda tvrdenie $\varphi \vee \psi$ je pravdivé

ekvivalencia

- nech φ a ψ sú nejaké tvrdenia
- tvrdenie „φ **práve vtedy, keď** ψ.“
  nazývame **ekvivalencia** tvrdení φ a ψ
- označujeme ho $\varphi \leftrightarrow \psi$
- **význam**:

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
nepravda	nepravda	pravda
nepravda	pravda	nepravda
pravda	nepravda	nepravda
pravda	pravda	pravda

- alternatívy k „$\varphi \leftrightarrow \psi$“:
  - „φ, **práve keď** ψ.“,
  - „φ **vtedy a len vtedy, keď** ψ.“,
  - „φ, **iff** ψ.“
    (anglická skratka pre **if and only if**)
  - „φ, **akk** ψ.“
    (poslovenčené **iff**)

ekvivalencia

- nech n je prirodzené číslo,
  φ znamená „Číslo n je párne."
  a ψ znamená „Číslo n je deliteľné tromi."
- potom $\varphi \leftrightarrow \psi$ znamená
  „Číslo n je párne **práve vtedy, keď** číslo n je deliteľné tromi.",
  resp. po štylistickej úprave
  „Číslo n je párne **práve vtedy, keď** je deliteľné tromi."
- pravdivosť tohto tvrdenia **závisí** od hodnoty čísla n:
  - ak n dáva po delení 6 zvyšok 2 alebo 4,
    tak tvrdenie φ je pravdivé, **ale** tvrdenie ψ je nepravdivé,
    a teda tvrdenie $\varphi \leftrightarrow \psi$ je nepravdivé
  - ak n dáva po delení 6 zvyšok 3,
    tak tvrdenie φ je nepravdivé, **ale** tvrdenie ψ je pravdivé,
    a teda tvrdenie $\varphi \leftrightarrow \psi$ je nepravdivé
  - ak n dáva po delení 6 zvyšok 1 alebo 5,
    tak tvrdenie φ je nepravdivé a tvrdenie ψ je **tiež** nepravdivé,
    a teda tvrdenie $\varphi \leftrightarrow \psi$ je pravdivé
  - ak n dáva po delení 6 zvyšok 0,
    tak tvrdenie φ je pravdivé a tvrdenie ψ je **tiež** pravdivé,
    a teda tvrdenie $\varphi \leftrightarrow \psi$ je pravdivé

implikácia

- nech φ a ψ sú nejaké tvrdenia
- tvrdenie „**Ak** φ, **tak** ψ."
  označujeme $\varphi \rightarrow \psi$
- hovoríme, že tvrdenie ψ je **implikáciou** tvrdenia φ
- **význam**:

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
nepravda	nepravda	pravda
nepravda	pravda	pravda
pravda	nepravda	nepravda
pravda	pravda	pravda

- alternatívy k „$\varphi \rightarrow \psi$":
  - „**Z** φ **vyplýva** ψ."
  - „φ **implikuje** ψ."
  - „$\psi \leftarrow \varphi$"
  - „ψ, **ak** φ."
  - „ψ **je dôsledkom** φ."
  - „φ, **ztv** ψ."
    (**ztv** je skratka pre **z toho vyplýva**)

implikácia

- nech n je prirodzené číslo,
  φ znamená „Číslo n je párne."
  a ψ znamená „Číslo n je deliteľné tromi."
- potom $\varphi \to \psi$ znamená
  „**Ak** číslo n je párne, **tak** číslo n je deliteľné tromi.",
  resp. po štylistickej úprave
  „**Ak** je číslo n párne, **tak** je deliteľné tromi."
- pravdivosť tohto tvrdenia **závisí** od hodnoty čísla n:
  - ak n dáva po delení 6 zvyšok 2 alebo 4,
    tak tvrdenie φ je pravdivé, **ale** tvrdenie ψ je nepravdivé,
    a teda tvrdenie $\varphi \to \psi$ je nepravdivé
  - ak n dáva po delení 6 zvyšok 1, 3 alebo 5,
    tak tvrdenie φ je nepravdivé,
    a teda tvrdenie $\varphi \to \psi$ je pravdivé
    (a to bez ohľadu na pravdivosť tvrdenia ψ)
  - ak n dáva po delení 6 zvyšok 0,
    tak tvrdenie ψ je pravdivé,
    a teda tvrdenie $\varphi \to \psi$ je pravdivé
    (a to bez ohľadu na pravdivosť tvrdenia φ)

logické spojky

- **unárna** „spojka“:

φ	$\neg\varphi$
0	1
1	0

- **binárne** spojky:

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$	$\varphi \rightarrow \psi$	$\varphi \oplus \psi$	$\varphi \uparrow \psi$	$\varphi \downarrow \psi$
0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0

  - $\oplus$ – **xor** (exkluzívne alebo)
  - $\uparrow$ – **nand** (negované a zároveň)
  - $\downarrow$ – **nor** (negované alebo)

- **nulárne** „spojky“:
  - $\top$ s konštantnou hodnotou 1
  - $\bot$ s konštantnou hodnotou 0

ekvivalentné tvrdenia

- tvrdenia nazveme **ekvivalentné**,
  ak pre všetky hodnoty ich (nekvantifikovaných) premenných
  sú obe **naraz** pravdivé, alebo obe **naraz** nepravdivé
- ak φ a ψ sú tvrdenia, tak tvrdenia $\neg(\varphi \wedge \psi)$ a $\neg\varphi \vee \neg\psi$ sú ekvivalentné:
  - o obsahu tvrdení φ a ψ nevieme,
    vieme však, že každé z nich je
    buď nepravdivé (má hodnotu 0),
    alebo pravdivé (má hodnotu 1)
  - všetky štyri prípady zapíšeme do prehľadnej tabuľky:

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$\neg\varphi \vee \neg\psi$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

  - nezávisle od toho, ktorý prípad nastal, sú naše tvrdenia ekvivalentné

(možno) neekvivalentné tvrdenia

- ak φ, ψ, ξ sú tvrdenia,
  tak tvrdenia $(\varphi \wedge \psi) \vee \xi$ a $\varphi \wedge (\psi \vee \xi)$ nemusia byť ekvivalentné:
  - rozoberieme osem prípadov:

φ	ψ	ξ	$\varphi \wedge \psi$	$(\varphi \wedge \psi) \vee \xi$	$\psi \vee \xi$	$\varphi \wedge (\psi \vee \xi)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

  - naše tvrdenia teda nie sú ekvivalentné práve vtedy,
    keď je tvrdenie φ nepravdivé a ξ pravdivé

príklady ekvivalentných tvrdení

- **komutativita**:
  - $\varphi \wedge \psi$ a $\psi \wedge \varphi$
  - $\varphi \vee \psi$ a $\psi \vee \varphi$
  - $\varphi \leftrightarrow \psi$ a $\psi \leftrightarrow \varphi$
  - avšak $\varphi \to \psi$ a $\psi \to \varphi$ nemusia byť ekvivalentné
- **asociativita**:
  - $(\varphi \wedge \psi) \wedge \xi$ a $\varphi \wedge (\psi \wedge \xi)$
  - $(\varphi \vee \psi) \vee \xi$ a $\varphi \vee (\psi \vee \xi)$
  - $(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \xi$ a $\varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \xi)$
  - avšak $(\varphi \to \psi) \to \xi$ a $\varphi \to (\psi \to \xi)$ nemusia byť ekvivalentné
- **distributivita**:
  - $\varphi \wedge (\psi \vee \xi)$ a $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \xi)$
  - $\varphi \vee (\psi \wedge \xi)$ a $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \xi)$

príklady ekvivalentných tvrdení

- **dvojitá negácia**:
    - $\neg\neg\varphi$ a φ
- **obmena**:
    - $\varphi \to \psi$ a $\neg\psi \to \neg\varphi$
- **De Morganove pravidlá**:
    - $\neg(\varphi \wedge \psi)$ a $\neg\varphi \vee \neg\psi$
    - $\neg(\varphi \vee \psi)$ a $\neg\varphi \wedge \neg\psi$
- **prepisy spojok**:
    - $\varphi \to \psi$ a $\neg\varphi \vee \psi$
    - $\varphi \leftrightarrow \psi$ a $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$
    - $\varphi \leftrightarrow \psi$ a $(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
    - $\neg\top$ a $\bot$
    - $\neg\bot$ a $\top$

príklady ekvivalentných tvrdení

- **idempotencia**:
  - $\varphi \wedge \varphi$ a φ
  - $\varphi \vee \varphi$ a φ
- **absorpcia**:
  - $\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)$ a φ
  - $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)$ a φ
- **agresivita**:
  - $\varphi \wedge \bot$ a $\bot$
  - $\varphi \vee \top$ a $\top$
- ...

kvantifikátory

- vždy **sa viažu na** nejakú **premennú**;
  konštanty ani iné symboly teda kvantifikovať nemožno
- píšu sa (spolu s touto premennou) **pred** kvantifikované tvrdenie
- určujú **potrebné množstvo** hodnôt tejto premennej,
  pre ktoré kvantifikované tvrdenie **platí**
- druhy kvantifikátorov:
  - $\exists v$ – **malý** alebo **existenčný** kvantifikátor
    - na pravdivosť tvrdenia musí platiť kvantifikované tvrdenie
      pre **aspoň jednu** prípustnú hodnotu premennej v
  - $\forall v$ – **veľký** alebo **všeobecný** kvantifikátor
    - na pravdivosť tvrdenia musí platiť kvantifikované tvrdenie
      pre **každú** prípustnú hodnotu premennej v

kvantifikátory

- nech n je premenná s hodnotami v $\mathbb{N}$
- $\exists n(2 \mid n)$:
  - kvantifikovaná premenná je n
  - **význam** tvrdenia:
    „**Existuje** (prirodzené číslo) n také, že 2 je deliteľom n.“
  - také prirodzené číslo naozaj **existuje** (napríklad 2);
    tvrdenie je teda **pravdivé**
- $\forall n(2 \mid n)$:
  - kvantifikovaná premenná je n
  - **význam** tvrdenia:
    „**Pre každé** (prirodzené číslo) n platí, že 2 je deliteľom n.“
  - **nie je pravda**, že tvrdenie $2 \mid n$ platí **pre každú** hodnotu premennej n,
    lebo existuje taká, pre ktoré neplatí (napríklad 3);
    tvrdenie je teda **nepravdivé**

výmena existenčných kvantifikátorov

- nech φ je tvrdenie s parametrami x a y
- tvrdenia
$$\exists x \exists y \varphi \qquad \text{a} \qquad \exists y \exists x \varphi$$
sú ekvivalentné;
obe znamenajú, že φ platí pre **nejaké** hodnoty premenných x a y
- nech φ je „$m \mid n$", pričom m a n sú premenné s hodnotami v $\mathbb{N}$
  - **význam** tvrdenia $\exists m \exists n (m \mid n)$:
  „Existuje (prirodzené číslo) m také,
  že existuje (prirodzené číslo) n také,
  že m je deliteľom n."
  - **význam** tvrdenia $\exists n \exists m (m \mid n)$:
  „Existuje (prirodzené číslo) n také,
  že existuje (prirodzené číslo) m také,
  že m je deliteľom n."
  - po štylistickej úprave zhodne:
  „Existujú (prirodzené čísla) m a n také, že m je deliteľom n."
  - obe tvrdenia teda majú **rovnaký význam**
  - také prirodzené čísla naozaj existujú (napríklad $m = n = 2$);
  obe tvrdenia sú teda **pravdivé**

výmena všeobecných kvantifikátorov

- nech φ je tvrdenie s parametrami x a y
- tvrdenia
$$\forall x \forall y \varphi \qquad \text{a} \qquad \forall y \forall x \varphi$$
sú ekvivalentné;
obe znamenajú, že φ platí pre **všetky** hodnoty premenných x a y
- nech φ je „$m \mid n$“, pričom m a n sú premenné s hodnotami v $\mathbb{N}$
  - **význam** tvrdenia $\forall m \forall n (m \mid n)$:
    „Pre každé (prirodzené číslo) m platí,
    že pre každé (prirodzené číslo) n platí,
    že m je deliteľom n.“
  - **význam** tvrdenia $\forall n \forall m (m \mid n)$:
    „Pre každé (prirodzené číslo) n platí,
    že pre každé (prirodzené číslo) m platí,
    že m je deliteľom n.“
  - po štylistickej úprave zhodne:
    „Pre každé (prirodzené čísla) m a n platí, že m je deliteľom n.“
  - obe tvrdenia teda majú **rovnaký význam**
  - nie pre každé m a n však tvrdenie φ platí (napríklad pre $m = 3$ a $n = 2$);
    obe tvrdenia sú teda **nepravdivé**

výmena kvantifikátorov rôzneho druhu

- nech φ je tvrdenie s parametrami x a y
- tvrdenia
$$\exists x \forall y \varphi \qquad \text{a} \qquad \forall y \exists x \varphi$$
nemusia byť ekvivalentné;
avšak **z prvého vyplýva druhé**:
univerzálne vyhovujúce x z prvého tvrdenia
vyhovuje pre každé y v druhom tvrdení
- nech φ je „$n = m$“, pričom m a n sú premenné s hodnotami v $\mathbb{N}$
  - **význam** tvrdenia $\exists m \forall n (n = m)$:
    „Existuje (prirodzené číslo) m také,
    že pre každé (prirodzené číslo) n platí,
    že $n = m$.“;
    toto tvrdenie je **nepravdivé** (napríklad pre $n = m + 1$)
  - **význam** tvrdenia $\forall n \exists m (n = m)$:
    „Pre každé (prirodzené číslo) n platí,
    že existuje (prirodzené číslo) m také,
    že $n = m$.“;
    toto tvrdenie je **pravdivé** (stačí za m zobrať n)
  - tvrdenia teda **nie sú ekvivalentné**

De Morganove pravidlá pre kvantifikátory

- nech φ je tvrdenie s parametrom x
- tvrdenia
$$\neg\forall x\varphi \qquad \text{a} \qquad \exists x\neg\varphi$$
sú ekvivalentné:
to, že nie je pravda, že pre každé x platí φ,
znamená, že existuje aspoň jedno x také, že preň φ neplatí
- tvrdenia
$$\neg\exists x\varphi \qquad \text{a} \qquad \forall x\neg\varphi$$
sú ekvivalentné:
to, že nie je pravda, že existuje x, pre ktoré platí φ,
znamená, že φ neplatí pre žiadne (t. j. každé) x

distribúcia kvantifikátora

- pri $\wedge$:
  - $\forall x(\varphi \wedge \psi)$ a $(\forall x\varphi) \wedge (\forall x\psi)$ **sú** ekvivalentné
  - $\exists x(\varphi \wedge \psi)$ a $(\exists x\varphi) \wedge (\exists x\psi)$ **nie sú** vždy ekvivalentné
    - napríklad ak x má hodnoty v $\mathbb{N}$,
      φ je $2 \mid x$ a ψ je $\neg(2 \mid x)$
    - z $\exists x(\varphi \wedge \psi)$ však vyplýva $(\exists x\varphi) \wedge (\exists x\psi)$
- pri $\vee$:
  - $\exists x(\varphi \vee \psi)$ a $(\exists x\varphi) \vee (\exists x\psi)$ **sú** ekvivalentné
  - $\forall x(\varphi \vee \psi)$ a $(\forall x\varphi) \vee (\forall x\psi)$ **nie sú** vždy ekvivalentné
    - napríklad ak x má hodnoty v $\mathbb{N}$,
      φ je $2 \mid x$ a ψ je $\neg(2 \mid x)$
    - z $(\forall x\varphi) \vee (\forall x\psi)$ však vyplýva $\forall x(\varphi \vee \psi)$

presun kvantifikátora

- nech φ nemá parameter x
  - $\forall x(\varphi \vee \psi)$ a $\varphi \vee \forall x\psi$ **sú** ekvivalentné
  - $\exists x(\varphi \vee \psi)$ a $\varphi \vee \exists x\psi$ **sú** ekvivalentné
  - $\forall x(\varphi \wedge \psi)$ a $\varphi \wedge \forall x\psi$ **sú** ekvivalentné
  - $\exists x(\varphi \wedge \psi)$ a $\varphi \wedge \exists x\psi$ **sú** ekvivalentné
  - $\forall x(\varphi \rightarrow \psi)$ a $\varphi \rightarrow \forall x\psi$ **sú** ekvivalentné
  - $\exists x(\varphi \rightarrow \psi)$ a $\varphi \rightarrow \exists x\psi$ **sú** ekvivalentné
- nech ψ nemá parameter x
  - $\forall x(\varphi \vee \psi)$ a $\forall x\varphi \vee \psi$ **sú** ekvivalentné
  - $\exists x(\varphi \vee \psi)$ a $\exists x\varphi \vee \psi$ **sú** ekvivalentné
  - $\forall x(\varphi \wedge \psi)$ a $\forall x\varphi \wedge \psi$ **sú** ekvivalentné
  - $\exists x(\varphi \wedge \psi)$ a $\exists x\varphi \wedge \psi$ **sú** ekvivalentné
  - $\forall x(\varphi \rightarrow \psi)$ a $\forall x\varphi \rightarrow \psi$ **nie sú** ekvivalentné
    - napríklad ak φ je $x = 0$ a ψ je $1 = 0$
  - $\forall x(\varphi \rightarrow \psi)$ a $\exists x\varphi \rightarrow \psi$ **sú** ekvivalentné
  - $\exists x(\varphi \rightarrow \psi)$ a $\exists x\varphi \rightarrow \psi$ **nie sú** ekvivalentné
  - $\exists x(\varphi \rightarrow \psi)$ a $\forall x\varphi \rightarrow \psi$ **sú** ekvivalentné