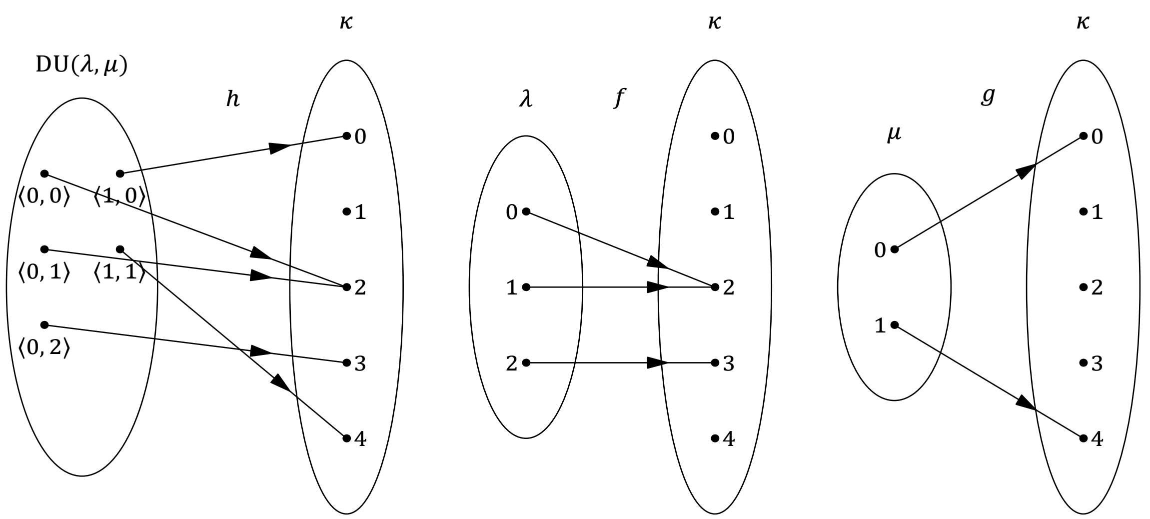
ÚVOD DO ŠTÚDIA INFORMATIKY

12. cvičenie

- **Zadanie:**
  Dokážte, že pre kardinály κ, λ a μ platí $\kappa \cdot (\lambda \cdot \mu) = (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu$.
  Riešenie:
  Nech $f : \kappa \times (\lambda \times \mu) \to (\kappa \times \lambda) \times \mu$, pričom $f(\langle k, \langle l, m \rangle\rangle) = \langle\langle k, l\rangle, m\rangle$. Ukážeme, že je to hľadaná bijekcia:
  - f je injekcia:
    - $f(\langle k_1, \langle l_1, m_1\rangle\rangle) = f(\langle k_2, \langle l_2, m_2\rangle\rangle)$,
      akk $\langle\langle k_1, l_1\rangle, m_1\rangle = \langle\langle k_2, l_2\rangle, m_2\rangle$,
      (podľa definície f),
      akk $\langle k_1, l_1\rangle = \langle k_2, l_2\rangle$ a $m_1 = m_2$
      (z vlastnosti usporiadanej dvojice),
      akk $k_1 = k_2$, $l_1 = l_2$ a $m_1 = m_2$
      (z vlastnosti usporiadanej dvojice),
      akk $k_1 = k_2$, $\langle l_1, m_1\rangle = \langle l_2, m_2\rangle$
      (z vlastnosti usporiadanej dvojice),
      akk $\langle k_1, \langle l_1, m_1\rangle\rangle = \langle k_2, \langle l_2, m_2\rangle\rangle$
      (z vlastnosti usporiadanej dvojice).
  - f je surjekcia na $(\kappa \times \lambda) \times \mu$:
    Nech $x \in (\kappa \times \lambda) \times \mu$, takže $x = \langle\langle k, l\rangle, m\rangle$ pre nejaké k z κ, l z λ a m z μ. Potom však $f(\langle k, \langle l, m\rangle\rangle) = \langle\langle k, l\rangle, m\rangle = x$, takže $x \in \mathrm{rng}(f)$.

- **Zadanie:**
  Dokážte, že pre kardinály κ, λ a μ platí $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$.
  Riešenie:
  Hľadáme bijekciu Φ z množiny $\mathrm{Fun}(\mathrm{DU}(\lambda, \mu), \kappa)$ do množiny $\mathrm{Fun}(\lambda, \kappa) \times \mathrm{Fun}(\mu, \kappa)$.
  Ak $h : \mathrm{DU}(\lambda, \mu) \to \kappa$, tak položme $\Phi(h) = \langle f, g\rangle$, kde $f : \lambda \to \kappa$ a $g : \mu \to \kappa$, pričom $f(l) = h(\langle 0, l\rangle)$ a $g(m) = h(\langle 1, m\rangle)$.
  Ak napríklad $\kappa = 5$, $\lambda = 3$ a $\mu = 2$ a h je ako na prvom obrázku, tak f je na druhom a g na treťom:



  Ukážeme, že Φ je vyhovujúca bijekcia:
  - Φ je injekcia:

- $\Phi(h_1) = \Phi(h_2)$,
  akk $\langle f_1, g_1\rangle = \langle f_2, g_2\rangle$,
  kde $f_1(l) = h_1(\langle 0, l\rangle)$, $g_1(m) = h_1(\langle 1, m\rangle)$
  a $f_2(l) = h_2(\langle 0, l\rangle)$, $g_2(m) = h_2(\langle 1, m\rangle)$
  (podľa definície Φ),
  akk $f_1 = f_2$ a $g_1 = g_2$,
  kde $f_1(l) = h_1(\langle 0, l\rangle)$, $g_1(m) = h_1(\langle 1, m\rangle)$
  a $f_2(l) = h_2(\langle 0, l\rangle)$, $g_2(m) = h_2(\langle 1, m\rangle)$
  (z vlastnosti usporiadanej dvojice),
  ztv $h_1(\langle 0, l\rangle) = h_2(\langle 0, l\rangle)$ a $h_1(\langle 1, m\rangle) = h_2(\langle 1, m\rangle)$
  (lebo z vlastnosti usporiadanej dvojice $f_1 = f_2$ a $g_1 = g_2$),
  akk $h_1 = h_2$
  (lebo prvá zložka môže byť len 0 alebo 1).
- Φ je surjekcia na $\mathrm{Fun}(\lambda, \kappa) \times \mathrm{Fun}(\mu, \kappa)$:
  Nech $f : \lambda \to \kappa$ a $g : \mu \to \kappa$. Nech h je funkcia z $\mathrm{DU}(\lambda, \mu)$ do κ definovaná vzťahmi $h(\langle 0, l\rangle) = f(l)$ a $h(\langle 1, m\rangle) = g(m)$. Potom $\Phi(h) = \langle f, g\rangle$.

- **Zadanie:**
  Dokážte, že pre kardinály κ, λ a μ platí $\kappa + (\lambda + \mu) = (\kappa + \lambda) + \mu$.
  Riešenie:
  Nech f je funkcia z množiny $\mathrm{DU}(\kappa, \mathrm{DU}(\lambda, \mu))$, t. j.
  $$(\{0\} \times \kappa) \cup (\{1\} \times (\{0\} \times \lambda) \cup (\{1\} \times \mu)),$$
  do množiny $\mathrm{DU}(\mathrm{DU}(\kappa, \lambda), \mu)$, t. j.
  $$(\{0\} \times (\{0\} \times \kappa) \cup (\{1\} \times \lambda)) \cup (\{1\} \times \mu),$$
  definovaná takto:
  - $f(\langle 0, k\rangle) = \langle 0, \langle 0, k\rangle\rangle$,
  - $f(\langle 1, \langle 0, l\rangle\rangle) = \langle 0, \langle 1, l\rangle\rangle$,
  - $f(\langle 1, \langle 1, m\rangle\rangle) = \langle 1, m\rangle$.

  Ukážeme, že je to hľadaná bijekcia:
  - f je injekcia:
    Rozoberme všetky prípady:
    - $f(\langle 0, k_1\rangle) = f(\langle 0, k_2\rangle)$,
      akk $\langle 0, \langle 0, k_1\rangle\rangle = \langle 0, \langle 0, k_2\rangle\rangle$
      (podľa definície f),
      ztv $\langle 0, k_1\rangle = \langle 0, k_2\rangle$
      (z vlastnosti usporiadanej dvojice).
    - $f(\langle 1, \langle 0, l_1\rangle\rangle) = f(\langle 1, \langle 0, l_2\rangle\rangle)$,
      akk $\langle 0, \langle 1, l_1\rangle\rangle = \langle 0, \langle 1, l_2\rangle\rangle$
      (podľa definície f),
      ztv $\langle 1, l_1\rangle = \langle 1, l_2\rangle$
      (z vlastnosti usporiadanej dvojice),
      ztv $l_1 = l_2$
      (z vlastnosti usporiadanej dvojice),
      ztv $\langle 0, l_1\rangle = \langle 0, l_2\rangle$
      (z vlastnosti usporiadanej dvojice),
      ztv $\langle 1, \langle 0, l_1\rangle\rangle = \langle 1, \langle 0, l_2\rangle\rangle$
      (z vlastnosti usporiadanej dvojice).
    - $f(\langle 1, \langle 1, m_1\rangle\rangle) = f(\langle 1, \langle 1, m_2\rangle\rangle)$,
      akk $\langle 1, m_1\rangle\rangle = \langle 1, m_2\rangle$
      (podľa definície f),
      ztv $\langle 1, \langle 1, m_1\rangle\rangle = \langle 1, \langle 1, m_2\rangle\rangle$,
      (z vlastnosti usporiadanej dvojice).

- $f(\langle 0, k\rangle) = f(\langle 1, \langle 0, l\rangle\rangle)$,
  akk $\langle 0, \langle 0, k\rangle\rangle = \langle 0, \langle 1, l\rangle\rangle$
  (podľa definície f),
  ztv $\langle 0, k\rangle = \langle 1, l\rangle$
  (z vlastnosti usporiadanej dvojice),
  ztv $0 = 1$
  (z vlastnosti usporiadanej dvojice),
  čo je spor, takže tento prípad nenastane.
- $f(\langle 0, k\rangle) = f(\langle 1, \langle 1, m\rangle\rangle)$,
  akk $\langle 0, \langle 0, k\rangle\rangle = \langle 1, m\rangle$
  (podľa definície f),
  ztv $0 = 1$
  (z vlastnosti usporiadanej dvojice),
  čo je spor, takže tento prípad nenastane.
- $f(\langle 1, \langle 0, l\rangle\rangle) = f(\langle 1, \langle 1, m\rangle\rangle)$,
  akk $\langle 0, \langle 1, l\rangle\rangle = \langle 1, m\rangle$
  (podľa definície f),
  ztv $0 = 1$
  (z vlastnosti usporiadanej dvojice),
  čo je spor, takže tento prípad nenastane.

- f je surjekcia na $(\{0\} \times (\{0\} \times \kappa) \cup (\{1\} \times \lambda)) \cup (\{1\} \times \mu)$:
  Rozoberme všetky prípady:
  - Nech $x \in \{0\} \times (\{0\} \times \kappa)$, t. j. $x = \langle 0, \langle 0, k\rangle\rangle$ pre nejaké k z κ.
    Potom $f(\langle 0, k\rangle) = \langle 0, \langle 0, k\rangle\rangle = x$, takže $x \in \mathrm{rng}(f)$.
  - Nech $x \in \{0\} \times (\{1\} \times \lambda)$, t. j. $x = \langle 0, \langle 1, l\rangle\rangle$ pre nejaké l z λ.
    Potom $f(\langle 1, \langle 0, l\rangle\rangle) = \langle 0, \langle 1, l\rangle\rangle = x$, takže $x \in \mathrm{rng}(f)$.
  - Nech $x \in \{1\} \times \mu$, t. j. $x = \langle 1, m\rangle$ pre nejaké m z μ.
    Potom $f(\langle 1, \langle 1, m\rangle\rangle) = \langle 1, m\rangle = x$, takže $x \in \mathrm{rng}(f)$.

Domáce úlohy

---

1 Ukážte, ako vyzerajú množiny $\kappa \times (\lambda \times \mu)$ a $\kappa \times \lambda) \times \mu$, ak $\kappa = 2$, $\lambda = 2$ a $\mu = 3$.

2 Ukážte, ako vyzerajú množiny $\mathrm{Fun}(\mathrm{DU}(\lambda, \mu), \kappa)$ a $\mathrm{Fun}(\lambda, \kappa) \times \mathrm{Fun}(\mu, \kappa)$, ak $\kappa = 2$, $\lambda = 2$ a $\mu = 2$.

3 Ukážte, ako vyzerajú množiny $\mathrm{DU}(\kappa, \mathrm{DU}(\lambda, \mu))$ a $\mathrm{DU}(\mathrm{DU}(\kappa, \lambda), \mu)$, ak $\kappa = 3$, $\lambda = 4$ a $\mu = 3$.

4 a) Ukážte, ako vyzerajú množiny $\kappa \times \mathrm{DU}(\lambda, \mu)$ a $\mathrm{DU}(\kappa \times \lambda, \kappa \times \mu)$, ak $\kappa = 2$, $\lambda = 3$ a $\mu = 4$.
b) Dokážte, že pre kardinály κ, λ a μ platí $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$.

5 a) Ukážte, ako vyzerajú množiny $\mathrm{Fun}(\mu, \mathrm{Fun}(\lambda, \kappa))$ a $\mathrm{Fun}(\lambda \times \mu, \kappa)$, ak $\kappa = 2$, $\lambda = 2$ a $\mu = 2$.
b) Dokážte, že pre kardinály κ, λ a μ platí $(\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$.
